Mates con Andrés · Eleva2

Los 10 problemas de Sistemas de Ecuaciones que debes saber resolver

Problemas originales de nivel PAU, inspirados en exámenes de 2022 a 2026.

Qué es este recurso. Diez problemas para aprender a traducir situaciones a ecuaciones, elegir un método y comprobar que la respuesta tenga sentido. Cada uno incluye un protocolo antibloqueo y una resolución detallada por Gauss o por la regla de Cramer.

Cómo utilizarlo. Intenta primero los problemas en tu cuaderno. Si te bloqueas, consulta una sola pista y vuelve a intentarlo. Cuando termines, contrasta tu planteamiento, tus cálculos y tu comprobación con la resolución completa.

1. Problemas propuestos

Problema 1 · Tres maneras de visitar un museo

Un museo ofrece tres modalidades de visita: libre, a 8 euros; guiada, a 12 euros; y con taller, a 15 euros. Cada visitante elige una sola modalidad. Durante una jornada entraron 180 visitantes y se recaudaron 1960 euros. El número de visitas guiadas superó en 20 al de visitas con taller.
Calcula cuántas personas eligieron cada modalidad.

Problema 2 · Una jornada de encuadernación

Un taller prepara cuadernos, carpetas y álbumes. La tabla indica los recursos necesarios para fabricar una unidad de cada artículo y los recursos disponibles para una jornada:

Recurso	Cuaderno	Carpeta	Álbum	Disponible
Pliegos de papel decorativo	2	1	3	62
Metros de cinta	1	2	2	48
Minutos de prensado	3	2	1	62

Determina cuántos artículos de cada tipo deben fabricarse para utilizar exactamente todos los recursos disponibles.

Problema 3 · La gratificación de tres brigadas

Tres brigadas, A, B y C, han dedicado en conjunto 150 horas a recuperar unos senderos. Reciben una gratificación total de 1800 euros, que se reparte de forma directamente proporcional a las horas trabajadas por cada brigada.
Las horas de A y B juntas superan en 30 al doble de las horas de C. Además, la gratificación de A es 120 euros mayor que la de B.
Calcula las horas trabajadas por cada brigada y la gratificación que le corresponde.

Problema 4 · El material de una expedición

Una empresa alquila tiendas de campaña, mochilas y dispositivos GPS. Las tres tarifas son positivas. Alquilar durante un día una unidad de cada artículo cuesta en total 90 euros. El precio de la tienda es la mitad de lo que cuestan juntos la mochila y el GPS.

a) ¿Permiten estos datos conocer el precio de cada artículo? Indica qué precio queda determinado y expresa la relación entre los otros dos.

b) En una promoción se aplican descuentos del 10 % a las tiendas, del 25 % a las mochilas y del 20 % a los GPS. Con esa promoción, el alquiler de una unidad de cada artículo cuesta 74 euros. Calcula los tres precios anteriores al descuento.

Problema 5 · Los talleres del centro cultural

Un centro cultural ofrece talleres de cerámica, fotografía y teatro. Cada persona está inscrita en un único taller. Sobre las actividades de fin de curso se sabe que:

- En una exposición participa el 50 % de cerámica, el 40 % de fotografía y el 20 % de teatro. En conjunto representan el 32 % de todas las personas inscritas.
- En una muestra abierta participa el 20 % de cerámica, el 60 % de fotografía y el 40 % de teatro. En conjunto representan el 42 % de todas las personas inscritas.
- En fotografía hay 30 personas más que en cerámica.

Los porcentajes describen cantidades exactas y una persona puede participar en ambas actividades. Calcula cuántas personas están inscritas en cada taller y cuántas hay en total.

Problema 6 · Plantas para recuperar un bosque

Tres viveros, A, B y C, disponen inicialmente de 540 plantas entre los tres. Para organizar una repoblación se realizan, por este orden, dos traslados:

1. A envía a B la cuarta parte de las plantas que A tenía al principio.
2. Después de recibirlas, B envía a C la tercera parte de las plantas que B tiene en ese momento.

No se pierde ninguna planta. Al terminar, B tiene 50 plantas más que A, y C tiene 30 plantas más que el doble de las que quedan en B.
Calcula las existencias iniciales de cada vivero y las cantidades que tienen después de los dos traslados.

Problema 7 · Una competición de precisión

En una competición de precisión se realizan pruebas a distancia corta, media y larga. Cada acierto suma, respectivamente, 2, 4 y 6 puntos; los fallos no suman ni restan.
Una participante obtuvo 160 puntos. Acertó exactamente el 75 % de los intentos a distancia corta, el 50 % a media y el 25 % a larga. Realizó 8 intentos menos a distancia media que a corta. Además, el triple del número de intentos a larga distancia fue igual a la suma de los intentos a corta y media distancia.
Calcula los intentos y los aciertos que realizó en cada tipo de prueba.

Problema 8 · Un sustrato para el invernadero

Un invernadero dispone de tres sustratos, A, B y C, con las siguientes composiciones en masa:

Componente	Sustrato A	Sustrato B	Sustrato C
Arena	20 %	10 %	30 %
Materia orgánica	10 %	30 %	20 %

El resto de cada sustrato está formado por otros componentes. Se quieren preparar 600 kg de una mezcla que contenga un 22 % de arena y un 21 % de materia orgánica. No se pierde masa durante la mezcla.
Determina cuántos kilogramos de cada sustrato deben utilizarse.

Problema 9 · Cuatro pedidos en una imprenta

Una imprenta aplica tres tarifas unitarias: impresión de una lámina A3, plastificado de una lámina A3 y encuadernación de un cuaderno. No se aplican descuentos ni cargos adicionales. Se conocen estos pedidos:

Pedido	Impresiones	Plastificados	Encuadernaciones	Importe
1	2	1	1	14 euros
2	1	3	2	21 euros
3	3	2	1	19 euros
4	3	4	3	35 euros

a) ¿Es imprescindible conocer los cuatro pedidos para determinar las tres tarifas? Justifica tu respuesta.

b) Calcula las tarifas y comprueba que satisfacen también el pedido que no fuera necesario utilizar.

Problema 10 · Tres procesos de tratamiento de agua

Una planta distribuye un lote de agua entre tres procesos, A, B y C. Cada metro cúbico se trata en un solo proceso. Los consumos por metro cúbico son:

Consumo por m^3	Proceso A	Proceso B	Proceso C
Energía (kWh)	2	3	4
Reactivo (g)	1	2	k

El parámetro $k \geq 0$ expresa el consumo de reactivo del proceso C, en g por m^3. Se quiere tratar un total de 90 m^3, consumiendo exactamente 260 kWh y $(140 + 10k)$ gramos de reactivo.

a) Plantea el sistema y discute su compatibilidad según $k \geq 0$.

b) Para $k = 1$, calcula el volumen tratado en cada proceso y comprueba los consumos.

c) Si algún valor de k permite infinitas soluciones, exprésalas e indica cuáles son admisibles en el contexto.

2. Protocolos antibloqueo

Lee solo la ayuda que necesites. Cada pista continúa el mismo recorrido que se desarrolla en la resolución.

Problema 1 · Tres maneras de visitar un museo

> **Pista 1: Reconoce.** Las incógnitas son números de visitantes; los precios de las tres modalidades ya son conocidos. Cada persona cuenta una vez en el total.
> **Pista 2: Decide.** Define x, y, z como visitas libres, guiadas y con taller. Usa el total, la recaudación y la diferencia entre guiadas y con taller. Resolverás mediante Gauss.
> **Pista 3: Empieza.** La primera ecuación es $x + y + z = 180$. Al formar la matriz ampliada, empieza por $F_2 \leftarrow F_2 - 8F_1$ para eliminar x de la recaudación.
> **Continúa tú.** Intercambia las dos últimas filas para disponer de un pivote 1. Termina de escalonar, vuelve al sistema y sustituye de abajo arriba. Comprueba personas y euros.

Problema 2 · Una jornada de encuadernación

Pista 1: Reconoce. La tabla da consumos por unidad fabricada, no cantidades de productos. Cada fila proporciona una condición sobre un recurso diferente.
Pista 2: Decide. Llama x, y, z a cuadernos, carpetas y álbumes. Plantea tres ecuaciones y prepara Cramer: necesitas una matriz de coeficientes cuadrada y determinante no nulo.
Pista 3: Empieza. La fila del papel se traduce en $2x+y+3z=62$. Conserva el mismo orden de artículos en las otras filas y forma la columna de disponibilidades.
Continúa tú. Calcula el determinante de coeficientes y verifica las hipótesis. Sustituye una columna cada vez por las disponibilidades. Al terminar, comprueba el consumo de los tres recursos.

Problema 3 · La gratificación de tres brigadas

Pista 1: Reconoce. El reparto es proporcional a las horas, por lo que todas las brigadas reciben la misma cantidad por cada hora trabajada.
Pista 2: Decide. Calcula primero cuántos euros corresponden a una hora usando los dos totales. Después trabaja con tres incógnitas que representen horas. Resuelve ese sistema por Cramer, comprobando sus hipótesis.
Pista 3: Empieza. La diferencia de gratificaciones se expresa como $\frac{1800}{150}(x-y)=120$. La otra relación compara $x+y$ con el doble de las horas de C.
Continúa tú. Completa el sistema de horas, calcula los cuatro determinantes y obtén los cocientes de Cramer. Convierte luego cada número de horas en euros y comprueba ambos totales.

Problema 4 · El material de una expedición

Pista 1: Reconoce. En el primer apartado solo hay dos condiciones para tres precios. Esto no impide que uno de los precios sí quede fijado.
Pista 2: Decide. Define x, y, z como precios de tienda, mochila y GPS. Escalona por Gauss las dos primeras ecuaciones y observa qué combinaciones de precios quedan determinadas.
Pista 3: Empieza. Escribe $x+y+z=90$ y $2x-y-z=0$. La operación $F_2 \leftarrow F_2-2F_1$ relaciona los dos últimos precios. Para el segundo apartado, un descuento del 25 % deja por pagar el 75 %.
Continúa tú. En el primer apartado, expresa los precios no determinados mediante una variable libre. En el segundo, añade el total rebajado, elimina decimales y vuelve a aplicar Gauss. Comprueba la compra original y la promocional.

Problema 5 · Los talleres del centro cultural

Pista 1: Reconoce. El número total de inscritos también es desconocido: debes representarlo como $x+y+z$. Los porcentajes de cada taller y los porcentajes del total tienen bases diferentes.
Pista 2: Decide. Define x, y, z como inscritos en cerámica, fotografía y teatro. Obtén dos ecuaciones a partir de las actividades y una de la diferencia entre talleres. Resuelve por Cramer, verificando primero sus hipótesis.
Pista 3: Empieza. La exposición proporciona $0{,}50x+0{,}40y+0{,}20z=0{,}32(x+y+z)$. Pasa todos los términos al mismo miembro, elimina decimales y simplifica los coeficientes.
Continúa tú. Haz lo mismo con la muestra abierta y conserva $y-x=30$ como tercera condición. Calcula los determinantes, halla las tres cantidades y comprueba los dos porcentajes globales usando el total obtenido.

Problema 6 · Plantas para recuperar un bosque

Pista 1: Reconoce. Las incógnitas son las existencias iniciales. El segundo traslado se calcula después de que B haya recibido plantas de A.
Pista 2: Decide. Escribe primero las existencias finales en función de x, y, z. Traduce las dos comparaciones finales y conserva el total inicial. Resolverás el sistema equivalente por Gauss.
Pista 3: Empieza. Después del primer traslado, B tiene $y + x/4$. Al terminar, en B quedan $\frac{2}{3}(y + x/4)$. Compáralo con lo que queda en A para obtener una ecuación.
Continúa tú. Expresa también lo que recibe C y utiliza la segunda comparación. Elimina denominadores, escalona y vuelve al sistema. Reconstruye ambos traslados para comprobar las existencias y su integridad.

Problema 7 · Una competición de precisión

Pista 1: Reconoce. Hay que distinguir intentos y aciertos. Los porcentajes se aplican a los intentos, pero los puntos se calculan a partir de los aciertos.
Pista 2: Decide. Define x, y, z como intentos a corta, media y larga distancia. Plantea la puntuación y las dos relaciones entre intentos. Utiliza Cramer solo después de comprobar sus hipótesis.
Pista 3: Empieza. La puntuación es $2(0{,}75x) + 4(0{,}50y) + 6(0{,}25z) = 160$. Simplifica y multiplica por 2 para trabajar con coeficientes enteros.
Continúa tú. Añade las relaciones sobre intentos y calcula los cuatro determinantes. Después aplica las tasas de acierto a los resultados; tanto intentos como aciertos y fallos deben ser enteros.

Problema 8 · Un sustrato para el invernadero

Pista 1: Reconoce. Las incógnitas son masas de sustrato. Para cada componente se conserva su masa, no la suma de los porcentajes de los tres materiales.
Pista 2: Decide. Usa una ecuación de masa total y otras dos para arena y materia orgánica. Resuelve por Cramer, tras verificar que la matriz es cuadrada y su determinante no se anula.
Pista 3: Empieza. La mezcla debe contener $0{,}22 \cdot 600$ kg de arena. La contribución de A a esa cantidad es $0{,}20x$; escribe de la misma forma las de B y C.
Continúa tú. Calcula también la masa objetivo de materia orgánica, elimina decimales y forma los determinantes. Comprueba las masas de los dos componentes y divídelas por la masa total para recuperar los porcentajes.

Problema 9 · Cuatro pedidos en una imprenta

Pista 1: Reconoce. Cuatro ecuaciones pueden aportar menos de cuatro condiciones independientes. Compara las cantidades de los pedidos antes de hacer cuentas.
Pista 2: Decide. Llama x, y, z a las tarifas de impresión, plastificado y encuadernación. Usa Gauss con las cuatro ecuaciones para comprobar qué datos son independientes.
Pista 3: Empieza. El pedido 4 contiene la suma de las unidades de los pedidos 1 y 2. Compara también sus importes. Para escalonar, coloca primero la ecuación del pedido 2, cuyo coeficiente de x es 1.
Continúa tú. Elimina la primera columna de las otras filas e identifica la fila redundante. Comprueba que las tres filas restantes tengan pivote. Vuelve al sistema escalonado y verifica después los cuatro pedidos.

Problema 10 · Tres procesos de tratamiento de agua

Pista 1: Reconoce. Las incógnitas son volúmenes de agua. El parámetro modifica el consumo de reactivo del proceso C y también el total de reactivo previsto.
Pista 2: Decide. Plantea las ecuaciones de volumen, energía y reactivo. Discute con Gauss sin dividir por expresiones del parámetro antes de estudiar cuándo se anulan.
Pista 3: Empieza. Empieza por $x + y + z = 90$. En la matriz ampliada, utiliza $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$ y $F_3 \leftarrow F_3 - F_1$. Después compara las dos últimas filas.
Continúa tú. Localiza cuándo desaparece el último pivote y estudia ese caso por separado. Para el valor numérico pedido, vuelve a escribir el sistema escalonado. Si queda una variable libre, impón que los tres volúmenes sean no negativos.

3. Resoluciones detalladas

Problema 1 · Tres maneras de visitar un museo

Resolución mediante Gauss

Definimos las incógnitas y planteamos.

Sean x, y, z los números de visitas libres, guiadas y con taller, respectivamente. Los precios son datos conocidos, así que no son las incógnitas.

El total de visitantes da $x + y + z = 180$. Cada visita libre aporta 8 euros; cada guiada, 12; y cada visita con taller, 15. Por tanto, la recaudación es $8x + 12y + 15z = 1960$. Finalmente, «las guiadas superan en 20 a las visitas con taller» significa $y = z + 20$.

$$\begin{cases} x + y + z = 180 \\ 8x + 12y + 15z = 1960 \\ y - z = 20. \end{cases}$$

Pasamos a la matriz ampliada y escalonamos.

Mantenemos las columnas en el orden x, y, z y separamos los términos independientes:

$$A^* = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 8 & 12 & 15 & 1960 \\ 0 & 1 & -1 & 20 \end{array}\right).$$

La primera fila tiene pivote 1. La usamos para eliminar el coeficiente de x de la segunda fila:

$$F_2 \leftarrow F_2 - 8F_1 \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & 4 & 7 & 520 \\ 0 & 1 & -1 & 20 \end{array}\right).$$

Intercambiamos las dos últimas filas para utilizar el coeficiente 1 de la tercera ecuación como segundo pivote:

$$F_2 \leftrightarrow F_3 \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 4 & 7 & 520 \end{array}\right).$$

Ahora anulamos el 4 que queda debajo de ese pivote:

$$F_3 \leftarrow F_3 - 4F_2 \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 11 & 440 \end{array}\right).$$

Hay tres pivotes y ninguna contradicción: el sistema es compatible determinado.

Volvemos al sistema escalonado y calculamos.

$$\begin{cases} x+y+z=180 \\ \quad y-z=20 \\ \quad\quad 11z=440. \end{cases}$$

De la última ecuación, $z = 440/11 = 40$. Sustituyendo en la segunda,

$$y - 40 = 20 \quad\Longrightarrow\quad y = 60.$$

En la primera,

$$x + 60 + 40 = 180 \quad\Longrightarrow\quad x = 80.$$

Comprobamos e interpretamos.

$$80 + 60 + 40 = 180 \text{ visitantes},$$
$$8 \cdot 80 + 12 \cdot 60 + 15 \cdot 40 = 640 + 720 + 600 = 1960 \text{ euros},$$
$$60 - 40 = 20 \text{ visitantes}.$$

Las tres cantidades son enteras y positivas.

Respuesta. Hubo **80 visitas libres, 60 guiadas y 40 con taller**.
Error que debes vigilar. La recaudación es una suma de precio por cantidad. No sumes solo los tres precios ni confundas «20 más» con «20 veces».

Problema 2 · Una jornada de encuadernación

Resolución mediante Cramer

Leemos la tabla y planteamos.

Definimos x como número de cuadernos, y como número de carpetas y z como número de álbumes. Como se utilizan todos los recursos, cada consumo total debe igualar su disponibilidad.

La fila del papel da $2x+y+3z = 62$, en pliegos. La cinta proporciona $x+2y+2z = 48$, en metros. El prensado da $3x + 2y + z = 62$, en minutos. No mezclamos unidades entre ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+y+3z=62 \\ x+2y+2z=48 \\ 3x+2y+z=62. \end{cases}$$

Comprobamos las hipótesis y aplicamos Cramer.

El sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas. Su matriz de coeficientes es cuadrada, de orden 3, y la columna de términos independientes es B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 62 \\ 48 \\ 62 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de A. En cada cálculo de Sarrus escribimos los tres productos que se suman y los tres que se restan, ya calculados y con sus signos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (4 + 6 + 6) - (18 + 1 + 8) = 16 - 27 = -11.$$

Como $|A| = -11 \neq 0$, se cumplen las hipótesis de la regla de Cramer: el sistema es compatible determinado y podemos obtener su única solución.

Sustituimos únicamente la primera columna de A por B; las otras dos conservan su posición:

$$A_x = \begin{pmatrix} 62 & 1 & 3 \\ 48 & 2 & 2 \\ 62 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad |A_x| = \begin{vmatrix} 62 & 1 & 3 \\ 48 & 2 & 2 \\ 62 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$|A_x| = (124 + 124 + 288) - (372 + 48 + 248) = 536 - 668 = -132.$$

Sustituimos únicamente la segunda columna de A por B; las otras dos conservan su posición:

$$A_y = \begin{pmatrix} 2 & 62 & 3 \\ 1 & 48 & 2 \\ 3 & 62 & 1 \end{pmatrix}, \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 62 & 3 \\ 1 & 48 & 2 \\ 3 & 62 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$|A_y| = (96 + 372 + 186) - (432 + 62 + 248) = 654 - 742 = -88.$$

Sustituimos únicamente la tercera columna de A por B; las otras dos conservan su posición:

$$A_z = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 62 \\ 1 & 2 & 48 \\ 3 & 2 & 62 \end{pmatrix}, \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 62 \\ 1 & 2 & 48 \\ 3 & 2 & 62 \end{vmatrix}.$$

$$|A_z| = (248 + 144 + 124) - (372 + 62 + 192) = 516 - 626 = -110.$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-132}{-11} = 12, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-88}{-11} = 8, \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-110}{-11} = 10.$$

Comprobamos los tres recursos.

$$2 \cdot 12 + 8 + 3 \cdot 10 = 24 + 8 + 30 = 62 \text{ pliegos},$$
$$12 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 10 = 12 + 16 + 20 = 48 \text{ m de cinta},$$
$$3 \cdot 12 + 2 \cdot 8 + 10 = 36 + 16 + 10 = 62 \text{ min}.$$

No sobra ningún recurso y las cantidades de artículos son enteras y positivas.

Respuesta. Se deben fabricar **12 cuadernos, 8 carpetas y 10 álbumes**.
Error que debes vigilar. Cada fila de la tabla corresponde a un recurso. Mantén siempre el orden cuaderno, carpeta y álbum, también al sustituir columnas en Cramer.

Problema 3 · La gratificación de tres brigadas

Resolución mediante Cramer

Convertimos la diferencia de dinero en una condición sobre horas.

Sea x el número de horas de A, y el de B y z el de C. El reparto directamente proporcional significa que cada hora recibe la misma gratificación:

$$\frac{1800 \text{ euros}}{150 \text{ horas}} = 12 \text{ euros por hora.}$$

Así, las gratificaciones son $12x, 12y, 12z$. El total de horas y la comparación entre brigadas proporcionan

$$x + y + z = 150, \qquad x + y = 2z + 30.$$

La diferencia de gratificaciones se traduce en

$$12x - 12y = 120 \quad \Longrightarrow \quad x - y = 10.$$

El sistema que resolvemos es, por tanto,

$$\begin{cases} x + y + z = 150 \\ x + y - 2z = 30 \\ x - y = 10. \end{cases}$$

Comprobamos las hipótesis y aplicamos Cramer.

El sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas. Su matriz de coeficientes es cuadrada, de orden 3, y la columna de términos independientes es B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 150 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de A. En cada cálculo de Sarrus escribimos los tres productos que se suman y los tres que se restan, ya calculados y con sus signos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0 + (-2) + (-1)) - (1 + 0 + 2) = (-3) - 3 = -6.$$

Como $|A| = -6 \neq 0$, se cumplen las hipótesis de la regla de Cramer: el sistema es compatible determinado y podemos obtener su única solución.

Sustituimos únicamente la primera columna de A por B; las otras dos conservan su posición:

$$A_x = \begin{pmatrix} 150 & 1 & 1 \\ 30 & 1 & -2 \\ 10 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad |A_x| = \begin{vmatrix} 150 & 1 & 1 \\ 30 & 1 & -2 \\ 10 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$|A_x| = (0 + (-20) + (-30)) - (10 + 0 + 300) = (-50) - 310 = -360.$$

Sustituimos únicamente la segunda columna de A por B; las otras dos conservan su posición:

$$A_y = \begin{pmatrix} 1 & 150 & 1 \\ 1 & 30 & -2 \\ 1 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 150 & 1 \\ 1 & 30 & -2 \\ 1 & 10 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$|A_y| = (0 + (-300) + 10) - (30 + 0 + (-20)) = (-290) - 10 = -300.$$

Sustituimos únicamente la tercera columna de A por B; las otras dos conservan su posición:

$$A_z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 150 \\ 1 & 1 & 30 \\ 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}, \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 150 \\ 1 & 1 & 30 \\ 1 & -1 & 10 \end{vmatrix}.$$

$$|A_z| = (10 + 30 + (-150)) - (150 + 10 + (-30)) = (-110) - 130 = -240.$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-360}{-6} = 60, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-300}{-6} = 50, \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-240}{-6} = 40.$$

Calculamos el reparto y comprobamos.

Las horas obtenidas son 60, 50 y 40. Las gratificaciones correspondientes son

$$12 \cdot 60 = 720, \qquad 12 \cdot 50 = 600, \qquad 12 \cdot 40 = 480 \text{ euros}.$$

Se verifican todas las condiciones:

$$\begin{aligned} 60 + 50 + 40 &= 150 \text{ horas}, \\ 60 + 50 &= 110 = 2 \cdot 40 + 30 \text{ horas}, \\ 720 - 600 &= 120 \text{ euros}, \\ 720 + 600 + 480 &= 1800 \text{ euros}. \end{aligned}$$

Además, $720/60 = 600/50 = 480/40 = 12$, por lo que el reparto es proporcional a las horas.

Respuesta. A trabajó **60 h y recibe 720 euros**; B, **50 h y 600 euros**; C, **40 h y 480 euros**.
Error que debes vigilar. La diferencia de 120 euros no es una diferencia de 120 horas. Primero debes calcular cuántos euros corresponden a cada hora.

Problema 4 · El material de una expedición

Resolución mediante Gauss

Apartado a): identificamos qué precios se pueden conocer.

Sean x, y, z, en euros, los precios de un día de alquiler de la tienda, la mochila y el GPS. Las dos condiciones iniciales son

$$\begin{cases} x + y + z = 90 \\ x = \dfrac{y + z}{2}. \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 90 \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$$

Pasamos a la matriz ampliada y eliminamos x de la segunda fila:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

$$F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1 \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & -3 & -3 & -180 \end{array}\right).$$

Volvemos al sistema y dividimos la segunda ecuación entre -3:

$$\begin{cases} x+y+z=90 \\ \quad y+z=60. \end{cases}$$

Restando ambas condiciones se obtiene $x=90-60=30$. Por tanto, el precio de la tienda sí queda fijado. En cambio, de los otros dos solo conocemos su suma. Si tomamos $z=t$, todas las soluciones son

$$(x,y,z)=(30,60-t,t), \qquad 0<t<60.$$

El intervalo se debe a que las tres tarifas son positivas. Hay dos pivotes para tres incógnitas: es un sistema compatible indeterminado, aunque una de las incógnitas está determinada.

Apartado b): incorporamos los descuentos.

Después del descuento se paga el 90 % de la tienda, el 75 % de la mochila y el 80 % del GPS:

$$0{,}90x+0{,}75y+0{,}80z=74.$$

Multiplicando toda esta ecuación por 20 obtenemos $18x+15y+16z=1480$. El sistema completo es

$$\begin{cases} x+y+z=90 \\ 2x-y-z=0 \\ 18x+15y+16z=1480. \end{cases}$$

Su matriz ampliada es

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 18 & 15 & 16 & 1480 \end{array}\right).$$

Anulamos la primera columna debajo del pivote 1, aplicando ambas operaciones a la matriz anterior:

$$\begin{array}{l} F_2 \leftarrow F_2-2F_1 \\ F_3 \leftarrow F_3-18F_1 \end{array} \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & -3 & -3 & -180 \\ 0 & -3 & -2 & -140 \end{array}\right).$$

Las dos últimas filas tienen el mismo coeficiente de y. Su resta permite eliminarlo:

$$F_3 \leftarrow F_3-F_2 \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & -3 & -3 & -180 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right).$$

Hay tres pivotes: ahora el sistema es compatible determinado.

Volvemos al sistema escalonado y despejamos.

$$\begin{cases} x+y+z=90 \\ -3y-3z=-180 \\ \quad z=40. \end{cases}$$

Con $z=40$, la segunda ecuación da

$$-3y-120=-180 \implies -3y=-60 \implies y=20.$$

La primera proporciona $x=90-20-40=30$.

Comprobamos los precios originales y la promoción.

$$30 + 20 + 40 = 90, \qquad 30 = \frac{20 + 40}{2}.$$

Los precios con descuento son 27, 15 y 32 euros, respectivamente, y

$$0{,}90 \cdot 30 + 0{,}75 \cdot 20 + 0{,}80 \cdot 40 = 27 + 15 + 32 = 74 \text{ euros.}$$

Respuesta. Antes de la promoción, la tienda costaba **30 euros**, la mochila **20 euros** y el GPS **40 euros** por día. En a) solo podía conocerse el precio de la tienda y que los otros dos sumaban 60 euros.
Error que debes vigilar. Un descuento del 25 % deja un precio del 75 %, no del 25 %. Tampoco confundas «el sistema tiene infinitas soluciones» con «no se conoce ninguna incógnita».

Problema 5 · Los talleres del centro cultural

Resolución mediante Cramer

Expresamos el total desconocido.

Definimos x, y, z como las personas inscritas en cerámica, fotografía y teatro. Como cada persona pertenece a un único taller, el total es $x + y + z$.

El número de participantes en la exposición es la suma de las cantidades correspondientes a cada taller. Esa cantidad equivale al 32 % del total:

$$0{,}50x + 0{,}40y + 0{,}20z = 0{,}32(x + y + z).$$

Multiplicamos por 100, pasamos todo al primer miembro y dividimos entre 2:

$$50x + 40y + 20z = 32x + 32y + 32z$$

$$18x + 8y - 12z = 0 \quad \Longrightarrow \quad 9x + 4y - 6z = 0.$$

En la muestra abierta ocurre lo mismo con el 42 %:

$$0{,}20x + 0{,}60y + 0{,}40z = 0{,}42(x + y + z).$$

Al multiplicar por 100 y reunir términos queda $-22x + 18y - 2z = 0$. Dividiendo entre -2, obtenemos $11x - 9y + z = 0$. Finalmente, $y = x + 30$. El sistema simplificado es

$$\begin{cases} 9x + 4y - 6z = 0 \\ 11x - 9y + z = 0 \\ -x + y = 30. \end{cases}$$

Comprobamos las hipótesis y aplicamos Cramer.

El sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas. Su matriz de coeficientes es cuadrada, de orden 3, y la columna de términos independientes es B:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & -6 \\ 11 & -9 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de A. En cada cálculo de Sarrus escribimos los tres productos que se suman y los tres que se restan, ya calculados y con sus signos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 9 & 4 & -6 \\ 11 & -9 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0 + (-4) + (-66)) - ((-54) + 0 + 9) = (-70) - (-45) = -25.$$

Como $|A| = -25 \neq 0$, se cumplen las hipótesis de la regla de Cramer: el sistema es compatible determinado y podemos obtener su única solución.

Sustituimos únicamente la primera columna de A por B; las otras dos conservan su posición:

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 0 & -9 & 1 \\ 30 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad |A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 0 & -9 & 1 \\ 30 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$|A_x| = (0 + 120 + 0) - (1620 + 0 + 0) = 120 - 1620 = -1500.$$

Sustituimos únicamente la segunda columna de A por B; las otras dos conservan su posición:

$$A_y = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 11 & 0 & 1 \\ -1 & 30 & 0 \end{pmatrix}, \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 11 & 0 & 1 \\ -1 & 30 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$|A_y| = (0 + 0 + (-1980)) - (0 + 0 + 270) = (-1980) - 270 = -2250.$$

Sustituimos únicamente la tercera columna de A por B; las otras dos conservan su posición:

$$A_z = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 0 \\ 11 & -9 & 0 \\ -1 & 1 & 30 \end{pmatrix}, \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 0 \\ 11 & -9 & 0 \\ -1 & 1 & 30 \end{vmatrix}.$$

$$|A_z| = ((-2430) + 0 + 0) - (0 + 1320 + 0) = (-2430) - 1320 = -3750.$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-1500}{-25} = 60, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-2250}{-25} = 90, \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-3750}{-25} = 150.$$

Comprobamos participaciones y total.

El total es $60 + 90 + 150 = 300$ personas. En la exposición participan

$$0{,}50 \cdot 60 + 0{,}40 \cdot 90 + 0{,}20 \cdot 150 = 30 + 36 + 30 = 96,$$

y $96/300 = 0{,}32$. En la muestra abierta participan

$$0{,}20 \cdot 60 + 0{,}60 \cdot 90 + 0{,}40 \cdot 150 = 12 + 54 + 60 = 126,$$

y $126/300 = 0{,}42$. Además, $90 - 60 = 30$. Los inscritos y las participaciones calculadas son enteros.

Respuesta. Hay **60 personas en cerámica, 90 en fotografía y 150 en teatro**; en total, **300 personas**.
Error que debes vigilar. El 32 % y el 42 % se aplican al total $x+y+z$, no a un taller concreto. El total no puede sustituirse por 100 solo porque los datos sean porcentajes.

Problema 6 · Plantas para recuperar un bosque

Resolución mediante Gauss

Representamos los dos traslados en su orden.

Sean x, y, z las existencias iniciales de A, B y C, en plantas. Antes de los traslados, $x + y + z = 540$.

A envía $x/4$ plantas a B. Justo después, A conserva $3x/4$ y B tiene $y + x/4$. El segundo envío es un tercio de esta última cantidad, no un tercio de y.

Por tanto, las existencias finales son

$$A_f = \frac{3}{4}x, \qquad B_f = \frac{2}{3}\left(y + \frac{x}{4}\right), \qquad C_f = z + \frac{1}{3}\left(y + \frac{x}{4}\right).$$

Traducimos las comparaciones finales.

La condición $B_f = A_f + 50$ da

$$\frac{2}{3}\left(y + \frac{x}{4}\right) = \frac{3}{4}x + 50.$$

Multiplicando por 12 resulta $8y + 2x = 9x + 600$, es decir, $-7x + 8y = 600$.

La otra condición es $C_f = 2B_f + 30$:

$$z + \frac{1}{3}\left(y + \frac{x}{4}\right) = \frac{4}{3}\left(y + \frac{x}{4}\right) + 30.$$

Restando el término común del segundo miembro obtenemos $z = y + x/4 + 30$. Multiplicamos por 4 y ordenamos: $-x - 4y + 4z = 120$. Así,

$$\begin{cases} x + y + z = 540 \\ -7x + 8y = 600 \\ -x - 4y + 4z = 120. \end{cases}$$

Pasamos a la matriz y escalonamos.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 540 \\ -7 & 8 & 0 & 600 \\ -1 & -4 & 4 & 120 \end{array}\right).$$

Utilizamos el primer pivote para anular los dos coeficientes de x situados debajo:

$$\begin{array}{l} F_2 \leftarrow F_2 + 7F_1 \\ F_3 \leftarrow F_3 + F_1 \end{array} \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 540 \\ 0 & 15 & 7 & 4380 \\ 0 & -3 & 5 & 660 \end{array}\right).$$

Intercambiamos las dos últimas filas para usar el coeficiente -3, más sencillo que 15:

$$F_2 \leftrightarrow F_3 \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 540 \\ 0 & -3 & 5 & 660 \\ 0 & 15 & 7 & 4380 \end{array}\right).$$

Ahora sumamos cinco veces la segunda fila a la tercera:

$$F_3 \leftarrow F_3 + 5F_2 \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 540 \\ 0 & -3 & 5 & 660 \\ 0 & 0 & 32 & 7680 \end{array}\right).$$

Los tres pivotes son no nulos y el sistema es compatible determinado.

Volvemos al sistema escalonado y calculamos.

$$\begin{cases} x+y+z=540 \\ -3y+5z=660 \\ \qquad 32z=7680. \end{cases}$$

De la última ecuación, $z = 7680/32 = 240$. Al sustituir en la segunda,

$$-3y + 5\cdot 240 = 660 \quad\Longrightarrow\quad -3y = -540 \quad\Longrightarrow\quad y = 180.$$

La primera da $x = 540 - 180 - 240 = 120$.

Reconstruimos los traslados y comprobamos.

A envía $120/4 = 30$ plantas. El estado intermedio es

$$(120-30,\, 180+30,\, 240) = (90, 210, 240).$$

B envía después $210/3 = 70$ plantas. El estado final es

$$(90,\, 210-70,\, 240+70) = (90, 140, 310).$$

Comprobamos todas las condiciones:

$$\begin{aligned} 120+180+240 &= 540, \\ 90+140+310 &= 540, \\ 140 &= 90+50, \\ 310 &= 2\cdot 140 + 30. \end{aligned}$$

Todas las existencias y los dos traslados son números enteros no negativos.

Respuesta. Inicialmente había **120 plantas en A, 180 en B y 240 en C**. Después de los traslados quedan **90, 140 y 310**, respectivamente.

Error que debes vigilar. El segundo tercio se calcula sobre las plantas de B después de recibir el primer envío. Usar $y/3$ cambiaría el problema.

Problema 7 · Una competición de precisión

Resolución mediante Cramer

Distinguimos intentos, aciertos y puntos.

Sean x, y, z los intentos a distancia corta, media y larga. Las cantidades de aciertos son, respectivamente, $0{,}75x$, $0{,}50y$ y $0{,}25z$.

Como los aciertos suman 2, 4 y 6 puntos según la prueba, la puntuación se traduce en

$$2(0{,}75x) + 4(0{,}50y) + 6(0{,}25z) = 160.$$

Simplificamos: $1{,}5x + 2y + 1{,}5z = 160$. Al multiplicar toda la ecuación por 2 queda $3x + 4y + 3z = 320$.

Los intentos a media distancia son ocho menos que a corta, $y = x - 8$. El triple de los intentos largos es la suma de los otros, $3z = x + y$. Por tanto,

$$\begin{cases} 3x+4y+3z=320 \\ \quad -x+y=-8 \\ x+y-3z=0. \end{cases}$$

Comprobamos las hipótesis y aplicamos Cramer.

El sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas. Su matriz de coeficientes es cuadrada, de orden 3, y la columna de términos independientes es B:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 320 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de A. En cada cálculo de Sarrus escribimos los tres productos que se suman y los tres que se restan, ya calculados y con sus signos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= ((-9) + 0 + (-3)) - (3 + 12 + 0) = (-12) - 15 = -27.$$

Como $|A| = -27 \neq 0$, se cumplen las hipótesis de la regla de Cramer: el sistema es compatible determinado y podemos obtener su única solución.

Sustituimos únicamente la primera columna de A por B; las otras dos conservan su posición:

$$A_x = \begin{pmatrix} 320 & 4 & 3 \\ -8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad |A_x| = \begin{vmatrix} 320 & 4 & 3 \\ -8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$|A_x| = ((-960) + 0 + (-24)) - (0 + 96 + 0) = (-984) - 96 = -1080.$$

Sustituimos únicamente la segunda columna de A por B; las otras dos conservan su posición:

$$A_y = \begin{pmatrix} 3 & 320 & 3 \\ -1 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 320 & 3 \\ -1 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$|A_y| = (72 + 0 + 0) - ((-24) + 960 + 0) = 72 - 936 = -864.$$

Sustituimos únicamente la tercera columna de A por B; las otras dos conservan su posición:

$$A_z = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 320 \\ -1 & 1 & -8 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 320 \\ -1 & 1 & -8 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$|A_z| = (0 + (-32) + (-320)) - (320 + 0 + (-24)) = (-352) - 296 = -648.$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-1080}{-27} = 40, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-864}{-27} = 32, \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-648}{-27} = 24.$$

Calculamos aciertos y comprobamos.

Las cantidades de aciertos son

$$0{,}75 \cdot 40 = 30, \qquad 0{,}50 \cdot 32 = 16, \qquad 0{,}25 \cdot 24 = 6.$$

Los fallos son $40 - 30 = 10$, $32 - 16 = 16$ y $24 - 6 = 18$. Tanto intentos como aciertos y fallos son enteros.

Además,

$$2 \cdot 30 + 4 \cdot 16 + 6 \cdot 6 = 60 + 64 + 36 = 160 \text{ puntos},$$
$$32 = 40 - 8,$$
$$3 \cdot 24 = 72 = 40 + 32.$$

Respuesta. Realizó **40 intentos cortos, 32 medios y 24 largos**, con **30, 16 y 6 aciertos**, respectivamente.
Error que debes vigilar. Los puntos se asignan a los aciertos, no a todos los intentos. Aquí las tasas describen resultados exactos: no estamos calculando probabilidades ni valores esperados.

Problema 8 · Un sustrato para el invernadero

Resolución mediante Cramer

Planteamos tres balances de masa.

Sean x, y, z los kilogramos de los sustratos A, B y C. Como no se pierde masa, $x + y + z = 600$.

La mezcla debe contener $0{,}22 \cdot 600 = 132$ kg de arena y $0{,}21 \cdot 600 = 126$ kg de materia orgánica. Cada sustrato aporta a esas masas el porcentaje correspondiente de su cantidad:

$$\begin{cases} x + y + z = 600 \\ 0{,}20x + 0{,}10y + 0{,}30z = 132 \\ 0{,}10x + 0{,}30y + 0{,}20z = 126. \end{cases}$$

Multiplicamos por 10 las dos últimas ecuaciones, incluidos sus segundos miembros, para obtener el sistema equivalente

$$\begin{cases} x + y + z = 600 \\ 2x + y + 3z = 1320 \\ x + 3y + 2z = 1260. \end{cases}$$

Comprobamos las hipótesis y aplicamos Cramer.

El sistema tiene tres ecuaciones y tres incógnitas. Su matriz de coeficientes es cuadrada, de orden 3, y la columna de términos independientes es B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 600 \\ 1320 \\ 1260 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de A. En cada cálculo de Sarrus escribimos los tres productos que se suman y los tres que se restan, ya calculados y con sus signos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= (2 + 3 + 6) - (1 + 4 + 9) = 11 - 14 = -3.$$

Como $|A| = -3 \neq 0$, se cumplen las hipótesis de la regla de Cramer: el sistema es compatible determinado y podemos obtener su única solución.

Sustituimos únicamente la primera columna de A por B; las otras dos conservan su posición:

$$A_x = \begin{pmatrix} 600 & 1 & 1 \\ 1320 & 1 & 3 \\ 1260 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad |A_x| = \begin{vmatrix} 600 & 1 & 1 \\ 1320 & 1 & 3 \\ 1260 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$|A_x| = (1200 + 3780 + 3960) - (1260 + 2640 + 5400) = 8940 - 9300 = -360.$$

Sustituimos únicamente la segunda columna de A por B; las otras dos conservan su posición:

$$A_y = \begin{pmatrix} 1 & 600 & 1 \\ 2 & 1320 & 3 \\ 1 & 1260 & 2 \end{pmatrix}, \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 600 & 1 \\ 2 & 1320 & 3 \\ 1 & 1260 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$|A_y| = (2640 + 1800 + 2520) - (1320 + 2400 + 3780) = 6960 - 7500 = -540.$$

Sustituimos únicamente la tercera columna de A por B; las otras dos conservan su posición:

$$A_z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 600 \\ 2 & 1 & 1320 \\ 1 & 3 & 1260 \end{pmatrix}, \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 600 \\ 2 & 1 & 1320 \\ 1 & 3 & 1260 \end{vmatrix}.$$

$$|A_z| = (1260 + 1320 + 3600) - (600 + 2520 + 3960) = 6180 - 7080 = -900.$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-360}{-3} = 120, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-540}{-3} = 180, \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-900}{-3} = 300.$$

Comprobamos las masas y recuperamos los porcentajes.

La masa total es $120 + 180 + 300 = 600$ kg. La arena aportada es

$$0{,}20 \cdot 120 + 0{,}10 \cdot 180 + 0{,}30 \cdot 300 = 24 + 18 + 90 = 132 \text{ kg}.$$

La materia orgánica aportada es

$$0{,}10 \cdot 120 + 0{,}30 \cdot 180 + 0{,}20 \cdot 300 = 12 + 54 + 60 = 126 \text{ kg}.$$

Por tanto, $132/600 = 0{,}22$ y $126/600 = 0{,}21$, exactamente los porcentajes pedidos. Los otros componentes suman $600 - 132 - 126 = 342$ kg; no hay que exigir que arena y materia orgánica agoten toda la mezcla.

Respuesta. Deben mezclarse **120 kg de A, 180 kg de B y 300 kg de C**.

Error que debes vigilar. Los porcentajes de los materiales no se suman directamente. Primero se calculan las masas que aporta cada uno y después se comparan con la masa total de la mezcla.

Problema 9 · Cuatro pedidos en una imprenta

Resolución mediante Gauss

Apartado a): reconocemos una condición redundante.

Sean x, y, z, en euros, las tarifas de una impresión, un plastificado y una encuadernación. Cada pedido proporciona una ecuación:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 14 \\ x + 3y + 2z = 21 \\ 3x + 2y + z = 19 \\ 3x + 4y + 3z = 35. \end{cases}$$

Las unidades del pedido 4 son la suma de las de los pedidos 1 y 2:

$$(3, 4, 3) = (2, 1, 1) + (1, 3, 2), \qquad 35 = 14 + 21.$$

Por tanto, la cuarta ecuación no añade información. Para asegurar que las tres primeras sí determinan las tarifas, comprobamos que aportan tres pivotes. Lo hacemos conservando también la cuarta ecuación en Gauss.

Pasamos a la matriz ampliada y escalonamos.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 14 \\ 1 & 3 & 2 & 21 \\ 3 & 2 & 1 & 19 \\ 3 & 4 & 3 & 35 \end{array}\right).$$

Colocamos primero la ecuación del pedido 2, cuyo coeficiente de x es 1:

$$F_1 \leftrightarrow F_2 \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 21 \\ 2 & 1 & 1 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 19 \\ 3 & 4 & 3 & 35 \end{array}\right).$$

Eliminamos los coeficientes de x de las otras tres filas, siempre usando la primera fila de la matriz anterior:

$$\begin{array}{l} F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \leftarrow F_3 - 3F_1 \\ F_4 \leftarrow F_4 - 3F_1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 21 \\ 0 & -5 & -3 & -28 \\ 0 & -7 & -5 & -44 \\ 0 & -5 & -3 & -28 \end{array}\right).$$

Para anular el segundo coeficiente de la tercera fila, multiplicamos esa fila por 5 y le restamos siete veces la segunda. La cuarta y la segunda son iguales, así que su resta da una fila nula:

$$\begin{array}{l} F_3 \leftarrow 5F_3 - 7F_2 \\ F_4 \leftarrow F_4 - F_2 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 21 \\ 0 & -5 & -3 & -28 \\ 0 & 0 & -4 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Hay tres pivotes tanto en A como en A^*; la última fila representa $0 = 0$. Así, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 3$: el sistema es compatible determinado. Bastan los tres primeros pedidos; el cuarto permite comprobarlos, pero no es imprescindible.

Apartado b): volvemos al sistema escalonado.

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 21 \\ -5y - 3z = -28 \\ -4z = -24 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

La tercera ecuación da $z = (-24)/(-4) = 6$. En la segunda,

$$-5y - 3 \cdot 6 = -28 \quad \Longrightarrow \quad -5y = -10 \quad \Longrightarrow \quad y = 2.$$

La primera proporciona

$$x + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 21 \quad \Longrightarrow \quad x = 21 - 6 - 12 = 3.$$

Comprobamos los cuatro pedidos.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 + 2 + 6 &= 14, \\ 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 &= 21, \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 6 &= 19, \\ 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 6 &= 35. \end{aligned}$$

Respuesta. Las tarifas son **3 euros por impresión, 2 por plastificado y 6 por encuadernación**. El cuarto pedido es redundante y su importe también queda verificado.
Error que debes vigilar. Tener cuatro ecuaciones para tres incógnitas no hace que el sistema sea incompatible. Lo decisivo es la información independiente y la coherencia de los términos independientes.

Problema 10 · Tres procesos de tratamiento de agua

Resolución mediante Gauss

Apartado a): planteamos los tres consumos.

Sean x, y, z, en m^3, los volúmenes tratados mediante los procesos A, B y C. Los volúmenes son no negativos y el parámetro cumple $k \geq 0$.

El balance de volumen es $x + y + z = 90$. Cada proceso consume 2, 3 y 4 kWh por m^3, de modo que $2x + 3y + 4z = 260$. Los consumos de reactivo son 1, 2 y k gramos por m^3:

$$\begin{cases} x + y + z = 90 \\ 2x + 3y + 4z = 260 \\ x + 2y + kz = 140 + 10k. \end{cases}$$

Escribimos la matriz ampliada y eliminamos la primera columna debajo del pivote 1:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 2 & 3 & 4 & 260 \\ 1 & 2 & k & 140 + 10k \end{array}\right).$$

$$\begin{array}{l} F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \leftarrow F_3 - F_1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 1 & 2 & 80 \\ 0 & 1 & k-1 & 50 + 10k \end{array}\right).$$

Restamos la segunda fila a la tercera, sin dividir por ninguna expresión de k:

$$F_3 \leftarrow F_3 - F_2 \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 1 & 2 & 80 \\ 0 & 0 & k-3 & 10k - 30 \end{array}\right).$$

Volvemos al sistema escalonado para interpretar la última fila:

$$\begin{cases} x + y + z = 90 \\ y + 2z = 80 \\ (k-3)z = 10(k-3). \end{cases}$$

Si $k \neq 3$: los tres pivotes son no nulos. Entonces $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es compatible determinado. En este caso sí se puede dividir la última ecuación entre $k - 3$:

$$z = 10, \qquad y = 80 - 2 \cdot 10 = 60, \qquad x = 90 - 60 - 10 = 20.$$

Los tres volúmenes son positivos para todos los valores $k \geq 0$ de este caso.

Si $k = 3$: la última fila es nula, incluido el término independiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 1 & 2 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Hay dos pivotes y tres incógnitas; $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) = 2$. El sistema es compatible indeterminado. No aparece ningún caso incompatible en el dominio $k \geq 0$.

Apartado b): resolvemos el caso $k = 1$ por Gauss.

Con $k = 1$, el total de reactivo es $140 + 10 = 150$ g. Mostramos las matrices del caso numérico:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 2 & 3 & 4 & 260 \\ 1 & 2 & 1 & 150 \end{array}\right).$$

$$\begin{array}{l} F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \leftarrow F_3 - F_1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 1 & 2 & 80 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \end{array}\right).$$

$$F_3 \leftarrow F_3 - F_2 \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 1 & 2 & 80 \\ 0 & 0 & -2 & -20 \end{array}\right).$$

Volvemos al sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 90 \\ \quad y + 2z = 80 \\ \quad\quad -2z = -20. \end{cases}$$

Así, $z = 10$, después $y = 80 - 2 \cdot 10 = 60$ y, finalmente, $x = 90 - 60 - 10 = 20$. Comprobamos los tres consumos originales:

$$\begin{gathered} 20 + 60 + 10 = 90 \text{ m}^3, \\ 2 \cdot 20 + 3 \cdot 60 + 4 \cdot 10 = 260 \text{ kWh}, \\ 20 + 2 \cdot 60 + 1 \cdot 10 = 150 \text{ g}. \end{gathered}$$

Apartado c): soluciones del caso indeterminado y admisibilidad.

Para $k = 3$, el sistema escalonado es

$$\begin{cases} x + y + z = 90 \\ y + 2z = 80 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Tomamos $z = t$. La segunda ecuación da $y = 80-2t$ y la primera, $x = 90-(80-2t)-t = 10+t$. Algebraicamente,

$$(x, y, z) = (10 + t, 80 - 2t, t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Para que los volúmenes sean no negativos se requiere

$$10 + t \geq 0, \qquad 80 - 2t \geq 0, \qquad t \geq 0.$$

Su intersección es $0 \leq t \leq 40$. Los extremos son admisibles: el enunciado permite dejar un proceso sin utilizar. La familia satisface las condiciones originales:

$$\begin{aligned} (10 + t) + (80 - 2t) + t &= 90, \\ 2(10 + t) + 3(80 - 2t) + 4t &= 260, \\ (10 + t) + 2(80 - 2t) + 3t &= 170 = 140 + 10 \cdot 3. \end{aligned}$$

Respuesta. Para $k \geq 0$, $k \neq 3$, hay una única solución: **20 m^3 en A, 60 en B y 10 en C**, también para $k = 1$. Para $k = 3$, las soluciones admisibles son $\boldsymbol{(10 + t, 80 - 2t, t)}$ m^3, con $\boldsymbol{0 \leq t \leq 40}$.
Error que debes vigilar. No dividas entre $k - 3$ antes de estudiar $k = 3$. Además, una solución algebraica del SCI solo es válida aquí si sus tres volúmenes son no negativos.

EL SIGUIENTE PASO

Trabaja con una ruta completa

En estos diez problemas has practicado cómo traducir un enunciado a ecuaciones, elegir un método y comprobar la respuesta.
En Eleva2 puedes seguir trabajando Matemáticas II con los temas explicados, vídeos ordenados, formularios, colecciones de ejercicios, protocolos antibloqueo, soluciones y resoluciones detalladas. También tienes planificación, directos y el Tutor Eleva2 para avanzar y revisar tus dudas con el método de Mates con Andrés.

DESCUBRE ELEVA2

Pulsa el botón o escanea el QR.