Mates con Andrés · Eleva2

10 ejercicios de estudio y representación de funciones

Matemáticas II y PAU · Protocolos antibloqueo y resoluciones detalladas

Qué es este recurso. Diez ejercicios para dominar el estudio de funciones: reconocer restricciones, justificar límites, interpretar derivadas y construir gráficas coherentes. Combina cuestiones concretas con estudios completos.

Cómo utilizarlo. Resuelve primero en tu cuaderno. Si te bloqueas, abre el protocolo del mismo número, lee una sola pista y vuelve a intentarlo. Consulta la resolución después y comprueba qué decisión o cálculo necesitas mejorar.

Convención de curvatura. Usamos $f'' > 0$: **cóncava**; $f'' < 0$: **convexa**. Un extremo o una inflexión debe ser un punto de la gráfica.

1. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1 · Dominio, simetría y cortes

Considera $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$. Determina su dominio, estudia si es par o impar y calcula sus cortes con los ejes, si existen. Justifica cada respuesta.

Ejercicio 2 · Asíntotas y posición de las ramas

Dada $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$, calcula todas sus asíntotas. Indica el comportamiento de la función a ambos lados de la asíntota vertical y si la gráfica queda por encima o por debajo de la asíntota oblicua.

Ejercicio 3 · Reconstruir una función con datos

La función $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{x^2-1}$ tiene asíntota horizontal $y = 2$ y su gráfica pasa por $(0, -1)$. Halla a y b y comprueba que ese punto es un máximo relativo.

Ejercicio 4 · Crecimiento de una exponencial

Sea $f(x) = xe^{1-x}$. Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y las coordenadas de sus extremos relativos.

Ejercicio 5 · Un mínimo que demuestra una desigualdad

Estudia el dominio, la monotonía, los extremos y la curvatura de $f(x) = x - 1 - \ln x$. Utiliza el resultado para demostrar que $\ln x \leq x - 1$ para todo $x > 0$ e indica cuándo se alcanza la igualdad.

Ejercicio 6 · Estudio completo de una cúbica

Realiza el estudio de $f(x) = x^3 - 3x^2$: dominio, simetrías respecto del eje Y o del origen, cortes, límites en el infinito, asíntotas, monotonía, extremos, curvatura y puntos de inflexión. Representa su gráfica.

Ejercicio 7 · Estudio completo de una racional

Realiza el estudio de $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$: dominio, simetrías respecto del eje Y o del origen, cortes, asíntotas, monotonía, extremos, curvatura y puntos de inflexión. Representa su gráfica respetando todas sus ramas.

Ejercicio 8 · Extremos con valor absoluto

Halla los extremos relativos de $g(x) = x^2 - 2|x|$. ¿Hay alguno en un punto donde la función no sea derivable? Esboza la gráfica a partir de sus dos ramas parabólicas.

Ejercicio 9 · Dos asíntotas en una función radical

Estudia $f(x) = \sqrt{x^2+1}$: dominio, simetría, cortes, asíntotas en cada extremo del dominio, monotonía, extremos, curvatura y puntos de inflexión. Representa su gráfica junto con las asíntotas.

Ejercicio 10 · Estudio de una función a trozos

Considera

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \le 0, \\ 2x - x^2, & x > 0. \end{cases}$$

Estudia la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$, la monotonía, los extremos relativos, la curvatura y los puntos de inflexión. Representa la función señalando los cortes con los ejes.

2. Protocolos antibloqueo

Una pista cada vez. Reconoce el tipo de ejercicio, decide cómo representarlo y escribe el primer paso. Detente en cuanto puedas continuar por tu cuenta.

Ejercicio 1 · Dominio, simetría y cortes

Pista 1: Reconoce. El logaritmo exige que su argumento sea estrictamente positivo. No basta con excluir el cero del denominador.
Pista 2: Decide. Resuelve la inecuación del cociente con una tabla de signos. Usa los ceros del numerador y del denominador para separar intervalos.
Pista 3: Empieza. Escribe $(x+1)/(x-1) > 0$. Después calcula $f(-x)$ y compara su argumento con el recíproco del argumento original.
Continúa tú. Comprueba si el dominio es simétrico. Para el eje X, recuerda que $\ln u = 0$ equivale a $u = 1$; para el eje Y, verifica primero si $x = 0$ está permitido.

Ejercicio 2 · Asíntotas y posición de las ramas

Pista 1: Reconoce. Hay un denominador que se anula y el grado del numerador supera en uno al del denominador.
Pista 2: Decide. Comprueba el límite en la discontinuidad y divide los polinomios para separar una recta y un resto que tienda a cero.
Pista 3: Empieza. Ordena $x^2 + 0x + 1$ y divídelo entre $x - 1$. Escribe la identidad ńfunción = cociente + resto/divisorż.
Continúa tú. Calcula los límites laterales y estudia el signo del resto dividido entre $x-1$. Ese signo sitúa la gráfica respecto de la recta.

Ejercicio 3 · Reconstruir una función con datos

Pista 1: Reconoce. Una asíntota horizontal y un punto de la gráfica se traducen en dos condiciones distintas.
Pista 2: Decide. Para hallar el límite en el infinito, compara los términos dominantes del numerador y del denominador. Usa después la condición $f(0) = -1$.
Pista 3: Empieza. Si $a = 0$, ¿podría ser $y = 2$ la asíntota? Si $a \neq 0$, compara ax^2 con x^2. Sustituye los parámetros hallados antes de derivar.
Continúa tú. Clasifica el punto mediante el cambio de signo de f'. Incluye los puntos excluidos del dominio en la tabla; no los conviertas en candidatos a extremo.

Ejercicio 4 · Crecimiento de una exponencial

Pista 1: Reconoce. La función es un producto. La derivada de la exponencial incluye la derivada de su exponente.
Pista 2: Decide. Aplica la regla del producto y saca el factor exponencial común antes de estudiar signos.
Pista 3: Empieza. Utiliza $(uv)' = u'v + uv'$ con $u = x$ y $v = e^{1-x}$. Recuerda que $(1-x)' = -1$.
Continúa tú. La exponencial nunca se anula y siempre es positiva. Estudia el otro factor, comprueba el cambio de signo y calcula la ordenada del extremo.

Ejercicio 5 · Un mínimo que demuestra una desigualdad

Pista 1: Reconoce. La desigualdad compara las dos expresiones cuya diferencia es $f(x)$. Conocer el mínimo de esa diferencia puede resolverla.
Pista 2: Decide. Empieza por el dominio del logaritmo. Después deriva, reúne f' en una sola fracción y estudia su signo.
Pista 3: Empieza. Escribe $f'(x) = 1 - 1/x$. El denominador tiene signo fijo dentro del dominio.
Continúa tú. Localiza y evalúa el extremo. Justifica que es un mínimo en todo el dominio, calcula f'' y traduce la cota de f a la desigualdad pedida.

Ejercicio 6 · Estudio completo de una cúbica

Pista 1: Reconoce. La función es polinómica de grado tres. Su dominio es $\mathbb{R}$ y no tiene ningún tipo de asíntota. Su término de mayor grado determina el comportamiento en el infinito.
Pista 2: Decide. Sigue el orden: dominio y simetría, cortes y límites, primera derivada, segunda derivada y gráfica.
Pista 3: Empieza. Factoriza $f(x) = x^2(x-3)$ para los cortes. Después factoriza también $f'(x)$ antes de resolver $f' = 0$.
Continúa tú. Construye las dos tablas de signos, calcula las ordenadas de los puntos destacados y dibuja solo al reunir toda la información.

Ejercicio 7 · Estudio completo de una racional

Pista 1: Reconoce. El dominio tiene una interrupción. Las tablas de signos y la gráfica deben respetarla, aunque la derivada no se anule allí.
Pista 2: Decide. Divide el numerador entre $x + 1$. La forma ńrecta + fracciónż facilita las asíntotas y también las derivadas.
Pista 3: Empieza. Divide $x^2 - 2x + 1$ entre $x + 1$. Para estudiar extremos, lleva f' a un denominador común y factoriza su numerador.
Continúa tú. Separa los intervalos por los ceros de f' y por la discontinuidad. Para una inflexión no basta con que cambie la curvatura: debe existir el punto de la gráfica.

Ejercicio 8 · Extremos con valor absoluto

Pista 1: Reconoce. El valor absoluto cambia de expresión en $x = 0$. Ese punto puede ser importante aunque no aparezca al resolver $g' = 0$.
Pista 2: Decide. Escribe $|x| = -x$ para $x < 0$ y $|x| = x$ para $x \geq 0$. Deriva cada expresión en su intervalo abierto.
Pista 3: Empieza. En el tramo negativo sustituye $-2|x|$ por $-2(-x)$. Revisa ese doble signo antes de continuar.
Continúa tú. Reúne los puntos estacionarios válidos y el punto de unión. Clasifica con los signos laterales, calcula las ordenadas y dibuja las dos ramas.

Ejercicio 9 · Dos asíntotas en una función radical

Pista 1: Reconoce. Al estudiar el infinito aparece $\sqrt{x^2} = |x|$. Los dos extremos del dominio pueden conducir a rectas diferentes.
Pista 2: Decide. Busca una recta $y = mx + n$ en cada extremo. Calcula primero el límite de $f(x)/x$ para hallar m y después el de $f(x) - mx$ para hallar n.
Pista 3: Empieza. En $+\infty$, escribe $\sqrt{x^2+1} = |x|\sqrt{1+1/x^2}$ para calcular m. Para hallar n, utiliza el conjugado.
Continúa tú. Para la rama izquierda, pasa los dos límites de $-\infty$ a $+\infty$ sustituyendo x por $-x$. Completa el estudio de crecimiento y curvatura y representa la función.

Ejercicio 10 · Estudio de una función a trozos

Pista 1: Reconoce. Cada fórmula es polinómica en su tramo. La única unión requiere una comprobación específica antes de analizar toda la función.
Pista 2: Decide. Compara primero los límites laterales y el valor en 0. Después deriva cada rama y evalúa su expresión en 0 para comparar las dos pendientes.
Pista 3: Empieza. Deriva por separado $x^2 + 2x$ y $2x - x^2$, y conserva junto a cada fórmula su condición sobre x.
Continúa tú. Filtra los candidatos a extremo por su tramo, estudia los signos de ambas derivadas y de las segundas derivadas. Un cambio de curvatura también se debe examinar donde f'' no existe.

3. Resoluciones detalladas

Ejercicio 1 · Dominio, simetría y cortes

Resolución mediante restricciones y comparación algebraica

1. Impón la condición del logaritmo.

El argumento debe ser positivo:

$$\frac{x+1}{x-1} > 0.$$

Los puntos que separan los intervalos son -1, donde se anula el numerador, y 1, donde se anula el denominador. Estudiamos sus signos:

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)/(x-1)$	$+$	$-$	$+$

En $x = -1$ tendríamos $\ln 0$; en $x = 1$ el cociente no existe. Ambos se excluyen. Así,

$$\boxed{\text{Dom } f = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty).}$$

2. Comprueba la simetría en ese dominio.

Si x pertenece al dominio, también pertenece $-x$. Podemos comparar:

$$f(-x) = \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{(x+1)/(x-1)}\right) = -f(x).$$

La función es **impar**: su gráfica es simétrica respecto del origen. Por ejemplo, $f(2) = \ln 3$ y $f(-2) = -\ln 3$.

3. Estudia los cortes.

No corta al eje Y, porque $0 \notin \operatorname{Dom} f$. Para cortar al eje X tendría que cumplirse

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0 \iff \frac{x+1}{x-1} = 1 \iff x+1 = x-1,$$

lo que es imposible. Tampoco hay corte con el eje X.

Respuesta. Dominio $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$; función impar; ningún corte con los ejes.

Error que debes vigilar. Una función impar no tiene por qué pasar por el origen si 0 no pertenece a su dominio.

Ejercicio 2 · Asíntotas y posición de las ramas

Resolución mediante límites laterales y división de polinomios

1. Localiza la discontinuidad y calcula los límites.

El dominio es $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Cerca de 1, el numerador tiende a $2>0$, mientras que el denominador cambia de signo:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty.$$

Por tanto, $\boxed{x=1}$ es asíntota vertical. No hay otros candidatos finitos: la función es continua donde el denominador no se anula.

2. Separa la recta y el resto.

La división se comprueba mediante

$$x^2+1 = (x-1)(x+1)+2.$$

Luego

$$f(x) = x+1+\frac{2}{x-1}.$$

La diferencia con la recta tiende a cero en ambos extremos:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-(x+1)\big) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x-1} = 0.$$

Así, $\boxed{y=x+1}$ es asíntota oblicua en $+\infty$ y en $-\infty$. No hay asíntotas horizontales: la expresión anterior da $f(x)\to+\infty$ a la derecha y $f(x)\to-\infty$ a la izquierda.

3. Sitúa las ramas respecto de la recta.

Estudiamos la diferencia, no el signo de f:

$$f(x)-(x+1) = \frac{2}{x-1}\begin{cases} <0, & x<1,\\ >0, & x>1.\end{cases}$$

La gráfica queda **por debajo** de la oblicua para $x<1$ y **por encima** para $x>1$. No la corta porque la diferencia nunca vale cero.

Respuesta. Asíntota vertical $x=1$, con límites laterales $-\infty$ y $+\infty$; oblicua $y=x+1$, con la rama izquierda debajo y la derecha encima.

Error que debes vigilar. La orientación junto a la asíntota vertical se justifica con límites laterales. Una asíntota oblicua se verifica restando la recta completa.

Ejercicio 3 · Reconstruir una función con datos

Resolución mediante traducción de condiciones y signo de la derivada

1. Usa la asíntota horizontal.

Si $a = 0$, el numerador es constante y el límite es 0, incompatible con la asíntota $y = 2$. Para $a \neq 0$, los términos dominantes en el numerador y en el denominador son ax^2 y x^2, respectivamente. Así,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^2+b}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^2}{x^2} = a.$$

La asíntota indicada exige $\boxed{a = 2}$.

2. Impón la pertenencia del punto.

Como 0 está en el dominio, sustituimos:

$$f(0) = \frac{b}{-1} = -b = -1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{b = 1}.$$

Por tanto,

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2-1}, \qquad \operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Las condiciones iniciales quedan comprobadas: $f(0) = -1$ y el límite en ambos infinitos es 2.

3. Justifica que el punto es un máximo.

Aplicamos la regla del cociente y simplificamos el numerador:

$$f'(x) = \frac{4x(x^2-1) - 2x(2x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-6x}{(x^2-1)^2}.$$

El denominador es positivo en el dominio. El signo de la derivada es el de $-x$:

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

En un entorno de 0, la función pasa de crecer a decrecer. Como $f(0) = -1$, hay un **máximo relativo en** $(0, -1)$. Las interrupciones en ± 1 separan intervalos, pero no son puntos de la gráfica.

Respuesta. $a = 2$, $b = 1$; el punto $(0, -1)$ es un máximo relativo.

Error que debes vigilar. Que $f'(0) = 0$ solo da un candidato. La clasificación requiere el cambio de signo de la derivada.

Ejercicio 4 · Crecimiento de una exponencial

Resolución mediante regla del producto y tabla de signos

1. Determina el dominio y deriva.

Tanto x como e^{1-x} están definidos en todo $\mathbb{R}$. La función es derivable en todo su dominio. Por la regla de la cadena,

$$\left(e^{1-x}\right)' = -e^{1-x}.$$

Aplicando la regla del producto:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{1-x} + x\left(-e^{1-x}\right) = \boxed{e^{1-x}(1-x)}.$$

2. Estudia el único factor que puede cambiar de signo.

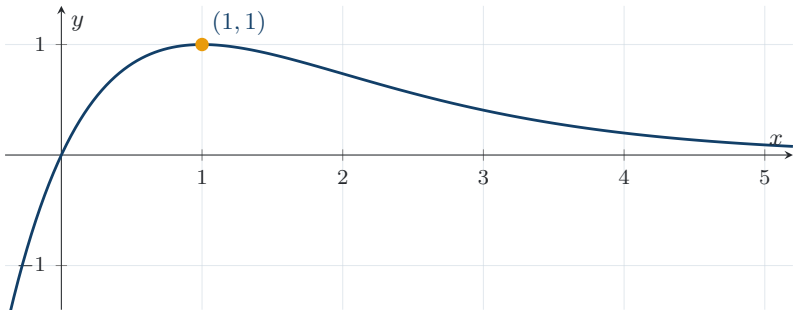
La exponencial es siempre positiva. Por tanto, $f'(x) = 0$ equivale a $1 - x = 0$, es decir, $x = 1$. La tabla es

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
e^{1-x}	$+$	$+$	$+$
$1 - x$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	máximo	$\searrow$

3. Calcula el punto y comprueba su clasificación.

La ordenada es $f(1) = 1 \cdot e^0 = 1$. El cambio de creciente a decreciente demuestra que $(1, 1)$ es un máximo relativo. Además, es absoluto: la función crece hasta él y decrece después en todo $\mathbb{R}$. No hay mínimos relativos.

Respuesta. Crece en $(-\infty, 1)$, decrece en $(1, +\infty)$ y tiene un máximo en $(1, 1)$.



La gráfica confirma el cambio de crecimiento en $(1, 1)$.

Error que debes vigilar. e^{1-x} nunca vale cero. Tampoco olvides el signo menos al derivar su exponente.

Ejercicio 5 · Un mínimo que demuestra una desigualdad

Resolución mediante monotonía, curvatura y cota global

1. Delimita el dominio y calcula la primera derivada.

El logaritmo exige $x > 0$, de modo que $\operatorname{Dom} f = (0, +\infty)$. En ese intervalo,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x}.$$

El denominador es positivo. La derivada solo se anula en $x = 1$:

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	mínimo	$\nearrow$

La función decrece antes de 1, crece después y $f(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$. Tiene un **mínimo absoluto en** $(1, 0)$; no presenta máximos relativos.

2. Comprueba la curvatura.

Derivando de nuevo,

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \qquad (x > 0).$$

Según la convención de este material, la función es **cóncava en todo** $(0, +\infty)$. No tiene puntos de inflexión: la curvatura no cambia. El punto 0 está fuera del dominio.

3. Traduce el mínimo a la desigualdad.

Al ser 0 el mínimo de f, para todo $x > 0$ se cumple

$$f(x) \geq 0 \iff x - 1 - \ln x \geq 0 \iff \boxed{\ln x \leq x - 1}.$$

La monotonía es estricta a cada lado de 1, así que el mínimo solo se alcanza allí. La igualdad se produce **únicamente cuando** $x = 1$.

Respuesta. Dominio $(0, +\infty)$, decrecimiento en $(0, 1)$, crecimiento en $(1, +\infty)$, mínimo absoluto $(1, 0)$ y curvatura cóncava en todo el dominio. La desigualdad queda demostrada.

Error que debes vigilar. Una comprobación con algunos valores no demuestra una desigualdad para todo el dominio. Aquí la prueba es el mínimo global.

Ejercicio 6 · Estudio completo de una cúbica

Resolución mediante protocolo de representación y dos tablas de signos

1. Dominio, simetría y cortes.

Al ser polinómica, Dom $f = \mathbb{R}$, y f es continua y derivable en todo punto. Como

$$f(-x) = -x^3 - 3x^2,$$

no coincide con $f(x) = x^3 - 3x^2$ ni con $-f(x) = -x^3 + 3x^2$. No es par ni impar.

Para los cortes con el eje X, factorizamos:

$$f(x) = x^2(x - 3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \text{ o } x = 3.$$

Los puntos son $(0, 0)$ y $(3, 0)$. El corte con el eje Y también es $(0, 0)$.

2. Límites y asíntotas.

El término dominante es x^3, por lo que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Las funciones polinómicas de grado dos o superior, como esta cúbica, no tienen ningún tipo de asíntota.

3. Monotonía y extremos.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2).$$

Los candidatos son $x = 0$ y $x = 2$. El signo se obtiene del producto:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	máx.	$\searrow$	mín.	$\nearrow$

La función crece en $(-\infty, 0)$ y $(2, +\infty)$, y decrece en $(0, 2)$. Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 8 - 12 = -4$, los extremos relativos son

$$\boxed{\text{máximo } (0, 0), \qquad \text{mínimo } (2, -4).}$$

Ninguno es absoluto, según los límites en el infinito.

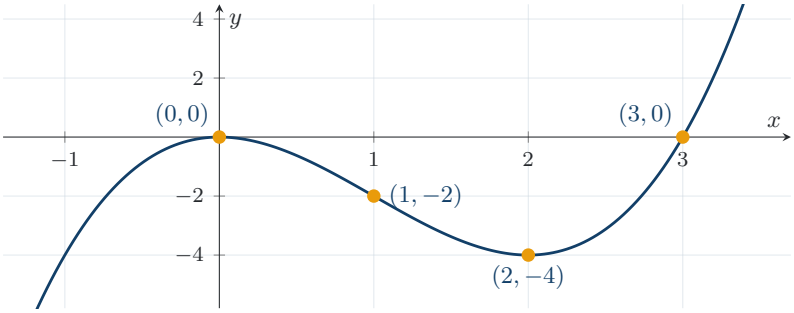
4. Curvatura e inflexión.

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1).$$

Es negativa para $x < 1$ y positiva para $x > 1$. La función es **convexa** en $(-\infty, 1)$ y **cóncava** en $(1, +\infty)$. Hay cambio de curvatura en $x = 1$, donde la función existe y es continua. Como $f(1) = 1 - 3 = -2$, el punto de inflexión es $\boxed{(1, -2)}$.

5. Construye y comprueba la gráfica.

La rama izquierda sube hasta $(0, 0)$, baja pasando por la inflexión, llega a $(2, -4)$ y vuelve a subir, cruzando el eje X en $(3, 0)$. En 0 toca el eje sin atravesarlo: $x^2 \geq 0$ y $x - 3 < 0$ a ambos lados próximos a ese punto.



Cortes, extremos e inflexión situados a partir de los cálculos.

Error que debes vigilar. Las raíces de f, de f' y de f'' responden a preguntas distintas. Clasifica los extremos y la inflexión mediante cambios de signo.

Ejercicio 7 · Estudio completo de una racional

Resolución mediante división, límites y análisis por intervalos

1. Dominio, simetría y cortes.

El denominador exige $x \neq -1$: $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ese dominio no es simétrico respecto de 0, por lo que la función no es par ni impar.

El numerador se anula solo en $x = 1$, que pertenece al dominio: el corte con X es $(1, 0)$. Además, $f(0) = 1$, de modo que el corte con Y es $(0, 1)$.

2. Obtén una expresión útil para los límites.

Dividimos usando la identidad

$$(x-1)^2 = (x+1)(x-3) + 4, \qquad f(x) = x - 3 + \frac{4}{x+1}.$$

En $x = -1$, el numerador de la expresión original tiende a $4 > 0$. Luego

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty.$$

La asíntota vertical es $\boxed{x = -1}$. En el infinito,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - (x-3)\big) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x+1} = 0.$$

La oblicua es $\boxed{y = x - 3}$ en ambos extremos. La rama izquierda queda debajo de ella, pues $4/(x+1) < 0$; la derecha queda encima. No hay horizontales: $f \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$ y $f \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$.

3. Estudia crecimiento y extremos.

Derivamos la expresión obtenida por división:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}.$$

Los ceros de la derivada son -3 y 1. Añadimos -1 a las fronteras de la tabla por estar excluido del dominio:

x	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

En -3 pasa de crecer a decrecer y $f(-3) = 16/(-2) = -8$: **máximo relativo** $(-3,-8)$. En 1 pasa de decrecer a crecer y $f(1) = 0$: **mínimo relativo** $(1,0)$. No hay extremos absolutos, pues la función no está acotada ni superior ni inferiormente.

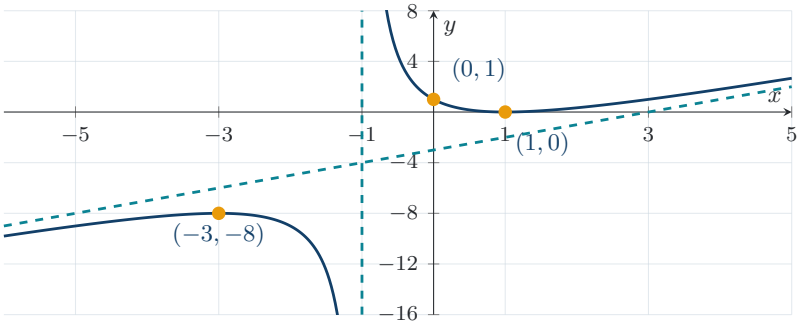
4. Estudia la curvatura sin inventar un punto de inflexión.

$$f''(x) = \frac{8}{(x+1)^3}.$$

Es negativa en $(-\infty,-1)$: función **convexa**. Es positiva en $(-1,+\infty)$: función **cóncava**. Aunque el signo cambia al pasar de una rama a otra, $x=-1$ no pertenece al dominio. **No hay puntos de inflexión.**

5. Reúne las dos ramas.

La rama izquierda permanece por debajo de la oblicua y tiene su máximo en $(-3,-8)$. La derecha baja desde $+\infty$, pasa por $(0,1)$, toca el eje X en $(1,0)$ y vuelve a subir por encima de la oblicua. No se unen las ramas a través de $x=-1$.



Las líneas discontinuas son las asíntotas $x=-1$ e $y=x-3$.

Error que debes vigilar. Una discontinuidad puede separar tramos con curvaturas distintas, pero no es un punto de inflexión: falta el punto de la gráfica.

Ejercicio 8 · Extremos con valor absoluto

Resolución mediante expresión por tramos y revisión del punto de unión

1. Abre el valor absoluto.

El dominio es $\mathbb{R}$. Sustituimos $|x| = -x$ para $x<0$ y $|x| = x$ para $x \geq 0$:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x < 0, \\ x^2 - 2x, & x \geq 0. \end{cases}$$

En 0, ambos límites laterales y el valor de la función son 0. Por tanto, la unión es continua.

2. Reúne todos los candidatos.

En los intervalos abiertos,

$$g'(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x < 0, \\ 2x - 2, & x > 0. \end{cases}$$

La primera expresión se anula en -1, válido en su tramo; la segunda se anula en 1, también válido. Además, debemos revisar 0. Las derivadas laterales son

$$g'_-(0) = 2, \qquad g'_+(0) = -2.$$

Son distintas: g **no es derivable en** 0. Esto no impide que allí tenga un extremo.

3. Clasifica por los signos a ambos lados.

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$g'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
g	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

En -1 y en 1, el signo cambia de negativo a positivo: hay mínimos. En 0, pasa de positivo a negativo y la función es continua: hay un máximo relativo. Calculando las ordenadas:

$$g(-1) = 1 - 2 = -1, \quad g(1) = 1 - 2 = -1, \quad g(0) = 0.$$

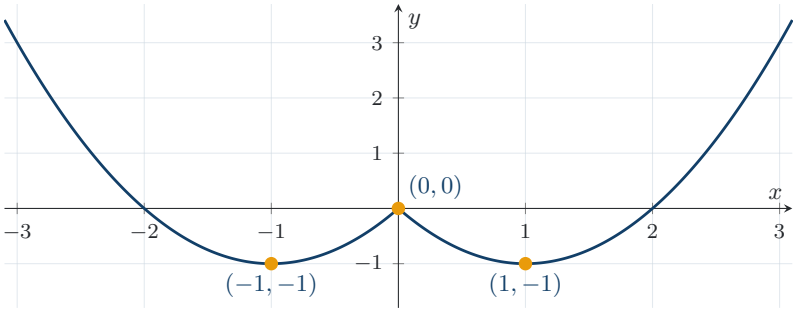
Respuesta. Mínimos relativos en $(-1, -1)$ y $(1, -1)$; máximo relativo en $(0, 0)$, donde la función no es derivable.

4. Dibuja y comprueba las dos ramas.

Las expresiones se pueden escribir como $(x + 1)^2 - 1$ para $x < 0$ y $(x - 1)^2 - 1$ para $x \geq 0$. Son ramas de parábolas con los vértices calculados. Los cortes se obtienen de

$$g(x) = |x|(|x| - 2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -2,\ 0,\ 2.$$

La función es par: el dibujo debe ser simétrico respecto del eje Y. Además, $g(x) = (|x| - 1)^2 - 1 \geq -1$, de modo que ambos mínimos son absolutos. El máximo de 0 es solo relativo: las ramas crecen sin cota superior.



El punto anguloso $(0, 0)$ es un máximo relativo.

Error que debes vigilar. Resolver únicamente $g' = 0$ dejaría fuera el máximo de $x = 0$. Revisa también los puntos del dominio donde no existe la derivada.

Ejercicio 9 · Dos asíntotas en una función radical

Resolución mediante cálculo de la pendiente y la ordenada en cada infinito

1. Dominio, simetría y cortes.

Como $x^2+1>0$ para todo x, Dom $f=\mathbb{R}$. La función es continua y derivable en todo punto. Es **par**, porque

$$f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}=\sqrt{x^2+1}=f(x).$$

No corta al eje X, ya que $f(x)\geq 1$. Corta al eje Y en $(0,1)$.

2. Calcula la asíntota de cada extremo.

Buscamos una recta $y=mx+n$ en cada infinito. Calculamos su pendiente m y después su ordenada en el origen n.

En $+\infty$. Como $x>0$, $\sqrt{x^2}=x$. Por tanto,

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1.$$

Para hallar n aparece la indeterminación $\infty-\infty$. Multiplicamos por el conjugado:

$$n=\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-mx\big)=\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2+1}-x\big)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$$

Con $m=1$ y $n=0$, la asíntota oblicua en $+\infty$ es $\boxed{y=x}$.

En $-\infty$. Pasamos el límite a $+\infty$ sustituyendo x por $-x$ en toda la expresión. Para la pendiente queda

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(-x)^2+1}}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=-1.$$

Como $m=-1$, tenemos $f(x)-mx=f(x)+x$. Al hacer el mismo cambio queda $f(-x)-x$. Racionalizamos:

$$n=\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)+x\big)=\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{(-x)^2+1}-x\big)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$$

Con $m=-1$ y $n=0$, la asíntota oblicua en $-\infty$ es $\boxed{y=-x}$. No hay verticales, porque la función es continua en todo $\mathbb{R}$, ni horizontales, pues tiende a $+\infty$ en ambos extremos.

3. Monotonía y extremo.

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

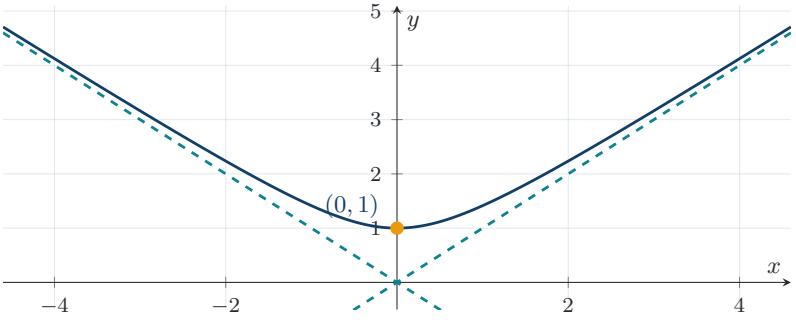
El denominador es siempre positivo. Por tanto, $f'<0$ para $x<0$, $f'(0)=0$ y $f'>0$ para $x>0$. Decrece en $(-\infty,0)$, crece en $(0,+\infty)$ y tiene un **mínimo absoluto en** $(0,1)$. No hay máximos.

4. Curvatura y representación.

Derivamos $x(x^2+1)^{-1/2}$:

$$f''(x)=(x^2+1)^{-1/2}-x^2(x^2+1)^{-3/2}=\frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^{3/2}}=\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}>0.$$

Es **cóncava en todo** $\mathbb{R}$ y no tiene puntos de inflexión. Para dibujarla, marcamos el mínimo en $(0,1)$, trazamos las dos oblicuas y usamos la simetría respecto del eje Y.



Las líneas discontinuas representan $y = -x$ en $-\infty$ e $y = x$ en $+\infty$.

Error que debes vigilar. $\sqrt{x^2} = |x|$, no x para cualquier real. El signo cambia la asíntota que corresponde a $-\infty$.

Ejercicio 10 · Estudio de una función a trozos

Resolución mediante análisis de la unión y de cada rama

1. Comprueba la continuidad y la derivabilidad en 0.

El dominio es $\mathbb{R}$. Cada rama es polinómica; solo necesitamos revisar la unión. Se cumple

$$\lim_{x\to 0^-}(x^2+2x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+}(2x-x^2) = 0, \qquad f(0) = 0.$$

La función es continua en 0. Derivamos la expresión de cada tramo:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+2, & x < 0, \\ 2-2x, & x > 0. \end{cases}$$

Como las dos ramas son polinómicas, calculamos las derivadas laterales evaluando esas expresiones en 0:

$$f'_-(0) = 2\cdot 0 + 2 = 2, \qquad f'_+(0) = 2 - 2\cdot 0 = 2.$$

Ambas coinciden, de modo que f es derivable en 0 y $\boxed{f'(0) = 2}$.

2. Estudia la monotonía y los extremos.

En el primer tramo, $2x + 2 = 0$ da $x = -1$. En el segundo, $2 - 2x = 0$ da $x = 1$. Ambos pertenecen al tramo correspondiente. La tabla de signos, incluyendo la unión, es

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	2	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

La función decrece en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$, y crece en todo $(-1, 1)$, incluida la unión. Las ordenadas son

$$f(-1) = 1 - 2 = -1, \qquad f(1) = 2 - 1 = 1.$$

Tiene un **mínimo relativo en** $(-1, -1)$ y un **máximo relativo en** $(1, 1)$. En 0 no hay extremo: la función sigue creciendo a ambos lados. Ningún extremo es absoluto, ya que $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to -\infty$ y $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to +\infty$.

3. Revisa la curvatura y el punto de unión.

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & x < 0, \\ -2, & x > 0. \end{cases}$$

Es **cóncava** en $(-\infty, 0)$ y **convexa** en $(0, +\infty)$. La segunda derivada no existe en 0: la derivada f' tiene pendiente lateral 2 por la izquierda y -2 por la derecha.

La gráfica sí tiene **un punto de inflexión en** $(0, 0)$: la función es continua y cambia de curvatura allí; además, tiene tangente, pues $f'(0) = 2$. No es necesario que $f''(0)$ exista ni que valga cero.

4. Calcula los cortes y representa.

En el tramo izquierdo,

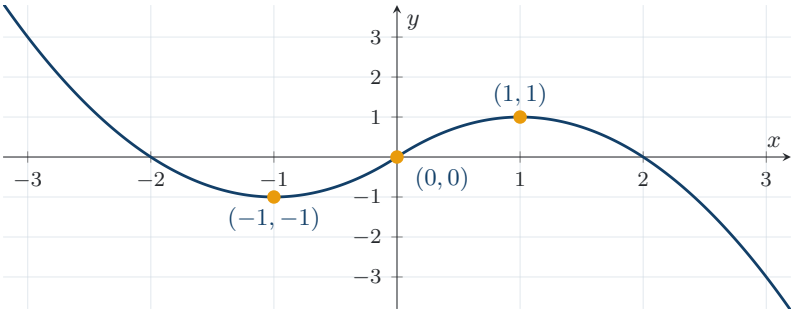
$$x^2 + 2x = x(x+2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -2,\ 0,$$

y ambos valores cumplen $x \leq 0$. En el derecho,

$$2x - x^2 = x(2-x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

es el único cero que cumple $x > 0$; 0 ya pertenece al primer tramo. Los cortes son $(-2, 0)$, $(0, 0)$ y $(2, 0)$, y el corte con Y es $(0, 0)$.

Dibujamos la rama izquierda de $(x+1)^2 - 1$ y la derecha de $1 - (x-1)^2$. Se unen sin salto ni punto anguloso en el origen. Como comprobación global, $f(-x) = -f(x)$: la gráfica es simétrica respecto del origen.



En el origen cambia la curvatura, pero la pendiente sigue siendo 2.

Error que debes vigilar. Buscar solo las soluciones de $f'' = 0$ no detectaría esta inflexión. Revisa también las uniones y los puntos donde no existe f''.

EL SIGUIENTE PASO

Trabaja con una ruta completa

En estos ejercicios has conectado dominio, límites y derivadas para interpretar y representar funciones. El siguiente paso es consolidar el método con práctica organizada y ayuda cuando la necesites.
En Eleva2 puedes seguir preparando Matemáticas II y la PAU con el tema explicado, vídeos ordenados, formularios, colecciones de ejercicios, pistas para empezar, soluciones y resoluciones detalladas. Tienes también planificación, directos y el Tutor Eleva2 para avanzar y revisar tus dudas con el método de Mates con Andrés.

DESCUBRE ELEVA2

Pulsa el botón o escanea el QR.