Mates con Andrés · Eleva2

Matrices antes del examen: 12 conceptos clave y los errores que debes evitar

Qué es este recurso

Una guía para comprender los doce conceptos de matrices que sostienen los ejercicios de examen. Cada concepto se explica con un ejemplo resuelto y con los errores que debes evitar. Estas advertencias no proceden de una lista genérica: son fruto de mi observación durante muchísimos años dando clase de Matemáticas II en 2.º de Bachillerato y recogen fallos que he visto repetirse una y otra vez.

1. Comprende	2. Comprueba	3. Corrige
Lee la idea esencial antes de mirar las operaciones.	Sigue el ejemplo y verifica dimensiones y orden.	Localiza el error típico y aplica la pauta para evitarlo.

1. Los 12 conceptos clave

1. Leer una matriz: dimensión, elementos y tipos básicos

QUÉ DEBES ENTENDER

Una matriz es una tabla rectangular de números. Si tiene m filas y n columnas, su dimensión es $m \times n$. El elemento a_{ij} está situado en la fila i y la columna j: el primer subíndice siempre indica la fila.

Una matriz es **fila** si tiene una sola fila, **columna** si tiene una sola columna y **cuadrada de orden** n si tiene n filas y n columnas. En una matriz cuadrada, la diagonal principal contiene los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. Una matriz diagonal tiene ceros fuera de esa diagonal.

EJEMPLO RESUELTO

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

La matriz A tiene 3 filas y 4 columnas, por lo que $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$. Además,

$$a_{24} = 1, \qquad a_{32} = 7.$$

En cambio,

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es cuadrada de orden 3 y diagonal.

Error frecuente. Intercambiar filas y columnas al escribir la dimensión o al localizar a_{ij}.
Por qué ocurre. Se lee i, j como si fueran coordenadas cartesianas y se empieza por la columna.
Cómo evitarlo. Pronuncia siempre "fila i, columna j". Para la dimensión, cuenta primero las líneas horizontales y después las entradas de una fila.
Comprobación rápida. En una matriz 2×5, a_{34} no existe: solo hay dos filas.

2. Igualdad de matrices

QUÉ DEBES ENTENDER

Dos matrices son iguales si, y solo si, tienen la misma dimensión y todos los elementos que ocupan la misma posición son iguales. Una igualdad matricial se transforma, por tanto, en varias igualdades numéricas.

EJEMPLO RESUELTO

Calculamos x, y y z para que

$$\begin{pmatrix} x+1 & 2y & -1 \\ 3 & x-y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Igualamos los elementos correspondientes:

$$x+1=5, \qquad 2y=-4, \qquad x-y=6, \qquad z=2.$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos $x=4$ e $y=-2$. La condición $x-y=6$ se cumple porque $4-(-2)=6$, y finalmente $z=2$.

Error frecuente. Utilizar solo algunas posiciones y no comprobar las demás.
Por qué ocurre. Se piensa que basta con hallar cada incógnita una vez, aunque otra entrada pueda imponer una condición adicional.
Cómo evitarlo. Escribe todas las igualdades por posiciones. Después de obtener los valores, sustitúyelos en las entradas que todavía no hayas utilizado.
Comprobación rápida. Antes de comparar elementos, comprueba que ambas matrices tienen exactamente la misma dimensión.

3. Matriz traspuesta y matrices simétricas

QUÉ DEBES ENTENDER

Trasponer una matriz significa convertir sus filas en columnas. Si A es $m \times n$, entonces A^T es $n \times m$. Una matriz cuadrada S es simétrica cuando $S^T = S$.

La traspuesta de un producto invierte el orden de los factores:

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

EJEMPLO RESUELTO

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad AB = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Si calculamos $B^T A^T$ obtenemos la misma matriz. Observa también que

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

es simétrica: los elementos situados a ambos lados de la diagonal coinciden.

Error frecuente. Escribir $(AB)^T = A^T B^T$.
Por qué ocurre. Se aplica la trasposición a cada factor, pero se olvida que la compatibilidad de dimensiones obliga a invertir el orden.
Cómo evitarlo. Asocia "trasponer un producto" con "dar la vuelta al orden": el último factor pasa a ser el primero.
Comprobación rápida. La dimensión ayuda: si AB es 2×2, ambos miembros de la propiedad deben tener esa dimensión.

4. Suma, resta y producto por un número

QUÉ DEBES ENTENDER

Solo se pueden sumar o restar matrices de la misma dimensión. La operación se realiza elemento a elemento. Al multiplicar una matriz por un número, ese número multiplica todas sus entradas.

EJEMPLO RESUELTO

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como ambas son 2×3, podemos calcular

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ -5 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cada posición se opera de forma independiente; por ejemplo, la entrada $(2,2)$ es $2 \cdot 4 - (-2) = 10$.

Error frecuente. Perder signos al restar una matriz o multiplicar solo una fila por el escalar.
Por qué ocurre. El signo menos se trata como si afectara únicamente al primer elemento visible.
Cómo evitarlo. Escribe primero la matriz completa ya multiplicada por el escalar y coloca paréntesis al restar entradas negativas.
Comprobación rápida. El resultado de una suma, una resta o un producto por un número conserva la dimensión de las matrices de partida.

5. Producto de matrices

QUÉ DEBES ENTENDER

El producto AB existe cuando el número de columnas de A coincide con el número de filas de B. Si A es $m \times n$ y B es $n \times p$, entonces AB es $m \times p$.

Cada entrada se obtiene multiplicando una fila de A por una columna de B y sumando los productos resultantes.

EJEMPLO RESUELTO

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $(2 \times 3)(3 \times 2)$, el producto existe y será 2×2. Por ejemplo,

$$(AB)_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 = 9.$$

Calculando de la misma forma las demás entradas,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2(-1) + (-1)3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + (-1)0 \\ 0 \cdot 2 + 3(-1) + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Error frecuente. Multiplicar entradas que ocupan la misma posición, como en una suma.
Por qué ocurre. Se traslada al producto la regla "elemento a elemento" de operaciones anteriores.
Cómo evitarlo. Antes de operar, señala una fila de la primera matriz y una columna de la segunda. Cada cruce produce una única entrada.
Comprobación rápida. Las dimensiones exteriores, 2 y 2, anuncian la dimensión final: 2×2.

6. Propiedades del producto e identidad

QUÉ DEBES ENTENDER

El producto de matrices es asociativo y distributivo respecto de la suma, pero en general no es conmutativo: puede ocurrir que $AB \neq BA$. La matriz identidad I actúa como el número 1 siempre que las dimensiones sean compatibles: $AI = A$ e $IA = A$.

Esta falta de conmutatividad también modifica desarrollos algebraicos conocidos:

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

EJEMPLO RESUELTO

Para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

obtenemos

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $AB \neq BA$. Además,

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

El desarrollo correcto da el mismo resultado:

$$A^2 + AB + BA + B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

No se pueden reunir $AB + BA$ como $2AB$ porque esos productos son distintos.

Error frecuente. Aplicar $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ sin comprobar si $AB = BA$.
Por qué ocurre. Se copia automáticamente la fórmula de los números reales.
Cómo evitarlo. Desarrolla $(A+B)(A+B)$ respetando el orden de aparición de los factores. Solo simplifica $AB + BA$ si previamente sabes que ambos productos coinciden.
Comprobación rápida. La identidad no altera la matriz, pero debe tener el orden adecuado. Si A es 2×3, en I_2A y AI_3 aparecen identidades distintas.

7. Potencias, patrones y ciclos

QUÉ DEBES ENTENDER

Las potencias de una matriz cuadrada se calculan mediante productos repetidos: $A^3 = A\,A\,A$. Antes de multiplicar muchas veces, conviene buscar un patrón. Si aparece una potencia igual a la identidad o se repite una matriz anterior, las potencias forman un ciclo.

EJEMPLO RESUELTO

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

En consecuencia,

$$A^{2k} = (A^2)^k = I, \qquad A^{2k+1} = A^{2k}A = A.$$

Como $2027 = 2 \cdot 1013 + 1$, el exponente es impar y

$$A^{2027} = A.$$

El cálculo queda reducido a identificar el resto al dividir el exponente entre la longitud del ciclo, que aquí es 2.

Error frecuente. Elevar cada entrada al exponente o intentar realizar cientos de productos.
Por qué ocurre. Se confunde la potencia matricial con una operación elemento a elemento y no se busca regularidad.
Cómo evitarlo. Calcula A^2, A^3 y, si hace falta, alguna potencia más. Detente en cuanto aparezca I o se repita una potencia anterior.
Comprobación rápida. La potencia A^n solo está definida de esta forma cuando A es cuadrada.

8. Matriz inversa mediante Gauss–Jordan

QUÉ DEBES ENTENDER

Una matriz cuadrada A es invertible si existe otra matriz A^{-1} tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Para calcularla por Gauss–Jordan, se escribe la matriz ampliada $(A \mid I)$ y se realizan operaciones elementales por filas hasta transformar el bloque izquierdo en I. El bloque derecho resultante es A^{-1}.

EJEMPLO RESUELTO

Calculamos la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Partimos de

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Aplicamos $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Después, $F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La comprobación $AA^{-1} = I$ confirma el resultado.
Si aplicamos el mismo proceso a $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, la operación $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$ produce una fila nula en el bloque izquierdo. No puede transformarse en I, así que C no tiene inversa.

Error frecuente. Realizar una operación solo en el bloque izquierdo de $(A \mid I)$.
Por qué ocurre. Se perciben los dos bloques como matrices separadas, aunque forman una única matriz ampliada.
Cómo evitarlo. Traza la barra solo como guía visual. Cada intercambio, multiplicación o combinación de filas debe afectar a la fila completa, a ambos lados de la barra.
Comprobación rápida. Multiplica la inversa obtenida por la matriz original. Si no aparece I, revisa las operaciones de fila y los signos.

9. Ecuaciones matriciales y orden de las inversas

QUÉ DEBES ENTENDER

En una ecuación matricial no se "divide" por una matriz. Se multiplica por su inversa en el lado adecuado, sin alterar el orden de los demás factores. Por ejemplo,

$$AXB = C \quad \Longrightarrow \quad X = A^{-1}CB^{-1},$$

si A y B son invertibles.

EJEMPLO RESUELTO

Consideramos

$$AXB = C, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por Gauss–Jordan se obtiene

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos la ecuación por A^{-1} a la izquierda:

$$A^{-1}(AXB) = A^{-1}C \quad \Longrightarrow \quad XB = A^{-1}C.$$

Ahora multiplicamos por B^{-1} a la derecha:

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La sustitución devuelve $AXB = C$, por lo que la solución es correcta.

Error frecuente. Escribir $X = B^{-1}A^{-1}C$ o colocar ambas inversas en el mismo lado.
Por qué ocurre. Se trata la ecuación como si las matrices fueran números y el orden no importara.
Cómo evitarlo. Rodea la incógnita paso a paso: elimina primero el factor situado a su izquierda multiplicando a la izquierda; después elimina el factor de su derecha multiplicando a la derecha.
Comprobación rápida. Sustituye siempre la matriz obtenida en la ecuación original y respeta exactamente el orden $A\,X\,B$.

10. Factor común e identidad en ecuaciones matriciales

QUÉ DEBES ENTENDER

Para sacar factor común, la incógnita debe ocupar el mismo lado en todos los términos. Si aparece $AX - 2X$, interpretamos $2X$ como $2IX$ y escribimos

$$AX - 2X = (A - 2I)X.$$

En cambio, una expresión como $AX + XB$ no admite un factor común matricial sencillo: X está a la derecha en un término y a la izquierda en el otro.

EJEMPLO RESUELTO

Resolvemos

$$AX - 2X = B, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Introducimos la identidad del orden adecuado:

$$(A - 2I)X = B, \qquad A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por Gauss–Jordan,

$$(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$X = (A - 2I)^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En una ecuación $AX + XB = C$, la vía general consiste en escribir X con entradas desconocidas, efectuar los productos e igualar posiciones.

Error frecuente. Escribir $AX + XB = (A + B)X$ o sustituir $2X$ por 2 al factorizar.
Por qué ocurre. No se observa en qué lado está situada X y se olvida que un número se representa mediante un múltiplo de la identidad.
Cómo evitarlo. Subraya la posición de X en cada término. Solo extrae factor común si queda en el mismo lado; convierte antes los escalares en múltiplos de I.
Comprobación rápida. Desarrolla el factor propuesto. Si $(A + B)X$ produce $AX + BX$, no puede representar $AX + XB$.

11. Rango de una matriz mediante Gauss

QUÉ DEBES ENTENDER

El rango es el número de filas no nulas que quedan después de escalonar la matriz mediante operaciones elementales por filas. No es necesario llegar a la forma reducida: basta con crear ceros por debajo de los pivotes y contar las filas no nulas.

EJEMPLO RESUELTO

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos primero $F_3 \leftarrow F_3 - F_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Después, $F_3 \leftarrow F_3 - F_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quedan dos filas no nulas, cada una con su pivote. Por tanto,

$$\operatorname{rg}(A) = 2.$$

La tercera fila original era la suma de las dos primeras, aunque esa dependencia no resultaba tan visible antes de escalonar.

Error frecuente. Contar filas no nulas antes de escalonar o creer que el rango es el número de filas de la matriz.
Por qué ocurre. Se confunde el tamaño de la matriz con la cantidad de información independiente que contienen sus filas.
Cómo evitarlo. Haz Gauss hasta que los pivotes formen una escalera. Solo entonces cuenta las filas que no sean completamente nulas.
Comprobación rápida. El rango nunca puede superar el menor número entre filas y columnas. En una matriz 3×4, el rango es como máximo 3.

12. Rango con un parámetro

QUÉ DEBES ENTENDER

Cuando una matriz depende de un parámetro, el rango puede cambiar para ciertos valores. La estrategia consiste en hacer Gauss manteniendo el parámetro, localizar las expresiones que pueden anular un pivote y estudiar por separado esos valores.

No se debe dividir por una expresión con el parámetro antes de separar el caso en que esa expresión vale cero.

EJEMPLO RESUELTO

Estudiamos el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos $F_2 \leftarrow F_2 - F_1$ y $F_3 \leftarrow F_3 - F_1$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}.$$

Los valores que pueden alterar el número de pivotes son $a = 1$ y $a = -1$.
Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$, las tres filas tienen pivote, luego $\operatorname{rg}(A) = 3$.
Si $a = 1$,

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo que $\operatorname{rg}(A) = 2$.
Si $a = -1$,

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y también $\operatorname{rg}(A) = 2$.
En resumen,

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3, & a \neq 1, -1, \\ 2, & a = 1 \text{ o } a = -1. \end{cases}$$

Error frecuente. Dividir una fila por $a - 1$ y continuar como si esa expresión nunca pudiera anularse.
Por qué ocurre. Se busca simplificar demasiado pronto y se pierde precisamente el caso especial que hay que estudiar.
Cómo evitarlo. Evita divisiones con el parámetro durante Gauss. Anota los valores que anulan posibles pivotes y sustitúyelos uno a uno en la matriz escalonada.
Comprobación rápida. Al terminar, todos los valores del parámetro deben estar incluidos en algún caso y los rangos obtenidos deben ser compatibles con la dimensión de la matriz.

2. El siguiente paso

Trabaja con una ruta completa

En **Eleva2** tienes el tema explicado paso a paso, vídeos ordenados, formularios para comprobar lo que sabes y una colección de ejercicios diseñada para avanzar con criterio.
Cuando un ejercicio se atasca, dispones de pistas para empezar **(protocolo antibloqueo)**, soluciones y resoluciones detalladas. También cuentas con directos y con el **Tutor Eleva2** para resolver dudas y ayudarte a continuar.

Entrar en los avisos de Eleva2

Escanea y entra