Mates con Andrés · Eleva2

Los 12 ejercicios de matrices que debes controlar antes del examen

Qué es este recurso.
Una selección de doce ejercicios para consolidar las ideas de matrices que más se repiten antes del examen. Cada ejercicio incluye un protocolo antibloqueo para ayudarte a empezar sin revelar el resultado y una resolución detallada para revisar el procedimiento completo.

Primero
Intenta el ejercicio sin mirar las pistas.

Si te bloqueas
Avanza una pista cada vez y vuelve al papel.

Al terminar
Contrasta tus pasos con la resolución razonada.

Cómo aprovecharlo. No leas las cuatro ayudas seguidas. Empieza por la pista 1; si todavía no puedes continuar, pasa a la siguiente. La indicación **Continúa** señala el punto a partir del cual ya deberías poder completar el ejercicio por tu cuenta.

1. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1 Producto y binomio matricial — Esencial

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula AB y BA. £Qué conclusión obtienes al compararlos?

b) Calcula $(A+B)^2$ y comprueba el resultado desarrollando el producto sin alterar el orden de los factores.

Ejercicio 2 Matrices que conmutan — Esencial

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determina todas las matrices B de orden 2 que verifican $AB = BA$.

Ejercicio 3 Potencia de una matriz — Intermedio

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Obtén una expresión para A^n, con $n \geq 1$, y demuestra por inducción que la fórmula es correcta.

Ejercicio 4 Potencia con exponente grande — Esencial

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcula A^{2026} sin efectuar sucesivamente las 2026 multiplicaciones.

Ejercicio 5 Producto de matrices en contexto — Esencial

Dos aulas preparan tres tipos de lotes para una jornada científica. La matriz

$$Q = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

indica cuántos lotes de los tipos $1, 2, 3$ prepara cada aula. Cada lote necesita cuadernos y rotuladores según la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

donde las filas corresponden a los tres tipos de lote y las columnas, en ese orden, a cuadernos y rotuladores.

Decide qué producto matricial permite conocer el material total que necesita cada aula, calcúlalo e interpreta todos sus elementos.

Ejercicio 6 Existencia y cálculo de la inversa — Intermedio

Estudia si son invertibles las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cuando exista la inversa, calcúlala mediante Gauss–Jordan. Justifica también por reducción por filas el caso en que no exista.

Ejercicio 7 Despeje en ecuaciones matriciales — Intermedio

Despeja X en cada ecuación. Supón compatibles todos los productos y existentes las inversas que utilices.

a) $A^T X = B$.
b) $XA + C = B$.
c) $AXB = 2C$.
d) $XA - 3X = C$.

Ejercicio 8 Ecuación matricial con datos — Intermedio

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resuelve la ecuación

$$AX - A^2 = BA.$$

Calcula la inversa necesaria mediante Gauss–Jordan y comprueba la solución en la ecuación inicial.

Ejercicio 9 Factor común matricial — Intermedio

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resuelve

$$AX - 2X = B.$$

Obtén mediante Gauss–Jordan la inversa que necesites y verifica el resultado.

Ejercicio 10 Rango por reducción de Gauss — Esencial

Calcula mediante Gauss el rango de cada matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 11 Rango con parámetro — Avanzado

Estudia, según los valores del parámetro a, el rango de

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a-1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 2a & a \end{pmatrix}.$$

Utiliza únicamente transformaciones elementales por filas.

Ejercicio 12 Identidad matricial e inversa — Intermedio

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Comprueba que $A^2 - 3A + I = 0$.

b) Utiliza esa igualdad para obtener A^{-1} sin iniciar una nueva reducción por filas.

2. Protocolos antibloqueo

Una regla importante. Estas ayudas están graduadas. Lee solo hasta recuperar una idea concreta para continuar. La última indicación no contiene la respuesta: únicamente te devuelve al procedimiento que debes completar.

Ejercicio 1 · Producto y binomio matricial

Pista 1. En un producto de matrices importa el orden: el elemento de la fila i y la columna j se obtiene multiplicando la fila i de la primera matriz por la columna j de la segunda.
Pista 2. Calcula AB y BA por separado. Para el segundo apartado, escribe $(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$ antes de desarrollar.
Pista 3. Al distribuir, conserva el orden de cada factor. Aparecerán cuatro términos y los dos términos centrales no tienen por qué coincidir.
Continúa. Suma los cuatro productos obtenidos y compáralos con el cuadrado calculado directamente.

Ejercicio 2 · Matrices que conmutan

Pista 1. Si buscas todas las matrices de orden 2, no debes empezar probando ejemplos. Escribe una matriz genérica con cuatro incógnitas.
Pista 2. Usa $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ y calcula AB y BA.
Pista 3. Dos matrices son iguales cuando coinciden los elementos situados en la misma posición. Igualar ambos productos produce un sistema de ecuaciones.
Continúa. Resuelve el sistema y expresa la familia de matrices dejando libres los parámetros que no queden determinados.

Ejercicio 3 · Potencia de una matriz

Pista 1. Calcula A^2 y A^3 para buscar qué elementos cambian con el exponente y cuáles conservan siempre el mismo valor.
Pista 2. La esquina superior izquierda contiene un bloque triangular 2×2; su elemento situado sobre la diagonal crece siguiendo una pauta lineal. El elemento inferior derecho sigue las potencias de -2.
Pista 3. Formula una hipótesis para A^n. En la inducción, comprueba primero $n = 1$, supón cierta la fórmula para $n = k$ y multiplica $A^k A$.
Continúa. Simplifica cada entrada del producto y comprueba que reproduce la misma expresión sustituyendo k por $k + 1$.

Ejercicio 4 · Potencia con exponente grande

Pista 1. Cuando el exponente es muy grande, conviene calcular las primeras potencias y buscar un ciclo.
Pista 2. Halla A^2, A^3 y A^4. Observa en qué momento reaparece la matriz identidad.
Pista 3. Divide 2026 entre la longitud del ciclo y utiliza únicamente el resto.
Continúa. Sustituye el exponente por la potencia equivalente dentro del ciclo y escribe la matriz resultante.

Ejercicio 5 · Producto de matrices en contexto

Pista 1. Antes de multiplicar, anota qué representa cada dimensión: aulas, tipos de lote y materiales.
Pista 2. La dimensión compartida debe ser la de los tipos de lote. Busca el orden en el que las columnas de la primera matriz coincidan con las filas de la segunda.
Pista 3. El resultado debe tener una fila por aula y una columna por material. Esa comprobación permite decidir el producto correcto antes de operar.
Continúa. Calcula cada entrada como una suma de tres productos e interpreta su fila y su columna, incluyendo la unidad correspondiente.

Ejercicio 6 · Existencia y cálculo de la inversa

Pista 1. Para decidir si una matriz cuadrada tiene inversa, reduce por filas. Si puedes transformar su parte izquierda en I, la inversa existe.
Pista 2. En A, comienza sustituyendo la tercera fila por la tercera menos la primera. En B, realiza la misma operación y compara después las dos últimas filas.
Pista 3. Para la matriz que sí sea invertible, trabaja con la ampliada $(A \mid I)$ y aplica a ambos bloques cada operación elemental.
Continúa. Lleva la parte izquierda hasta I. El bloque que quede a la derecha será la inversa; comprueba el resultado con un producto.

Ejercicio 7 · Despeje en ecuaciones matriciales

Pista 1. No se puede cambiar el orden de los factores. Para eliminar una matriz situada a la izquierda de X, multiplica por su inversa a la izquierda; si está a la derecha, hazlo a la derecha.
Pista 2. En el apartado b), aísla primero XA. En el c), elimina A y B desde sus lados respectivos.
Pista 3. En el apartado d), interpreta $3X$ como $X(3I)$ para poder sacar X como factor común por la izquierda.
Continúa. Revisa la posición de cada inversa y sustituye mentalmente tus expresiones en las ecuaciones originales.

Ejercicio 8 · Ecuación matricial con datos

Pista 1. Reúne en un mismo miembro el término que contiene X y pasa A^2 al otro lado.
Pista 2. En el segundo miembro hay dos productos con A a la derecha. Saca ese factor común sin intercambiar matrices.
Pista 3. Para despejar X, necesitarás A^{-1} a la izquierda. Calcúlala reduciendo $(A \mid I)$.
Continúa. Efectúa los productos en el orden indicado y verifica la matriz obtenida sustituyéndola en ambos miembros de la igualdad inicial.

Ejercicio 9 · Factor común matricial

Pista 1. Los dos términos del primer miembro contienen X a la derecha.
Pista 2. Escribe $2X = (2I)X$ y saca X como factor común por la derecha.
Pista 3. La ecuación se convierte en un producto de una matriz conocida por X. Calcula la inversa de esa matriz mediante Gauss–Jordan.
Continúa. Multiplica por la inversa en el lado correcto, opera y comprueba el resultado en la ecuación original.

Ejercicio 10 · Rango por reducción de Gauss

Pista 1. El rango es el número de filas no nulas que quedan después de escalonar la matriz.
Pista 2. Usa la primera fila para anular el primer elemento de las filas inferiores. Evita normalizar si no es necesario.
Pista 3. En una de las matrices todas las filas son proporcionales. En otra, una fila es combinación de las dos anteriores, pero esas dos no son proporcionales.
Continúa. Cuenta las filas no nulas de cada forma escalonada y comprueba que el valor no supera el número de filas ni el de columnas.

Ejercicio 11 · Rango con parámetro

Pista 1. Reduce simbólicamente sin dividir por una expresión que pueda anularse.
Pista 2. En D, resta la primera fila a la segunda y a la tercera. En E, resta dos veces la primera fila a la segunda.
Pista 3. Localiza los valores de a que convierten en cero alguna fila que normalmente sería no nula. Esos son los únicos casos que debes estudiar por separado.
Continúa. Sustituye cada valor especial en la forma reducida y cuenta las filas no nulas; fuera de esos valores, cuenta los pivotes simbólicos.

Ejercicio 12 · Identidad matricial e inversa

Pista 1. Calcula primero A^2 y después forma $A^2 - 3A + I$ entrada a entrada.
Pista 2. Para obtener la inversa, reorganiza la identidad dada de modo que en un miembro aparezca I.
Pista 3. Agrupa los otros términos como un producto en el que uno de los factores sea A.
Continúa. Identifica qué matriz multiplicada por A produce I y comprueba el producto en ambos órdenes.

3. Resoluciones detalladas

Ejercicio 1

a) Calculamos los dos productos respetando el orden.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 3 & 1(-1) + 2\cdot 1 \\ (-1)2 + 0\cdot 3 & (-1)(-1) + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En el orden contrario,

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $AB \neq BA$. Este ejemplo confirma que el producto de matrices no es, en general, conmutativo.
b) Cálculo directo. Como

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

obtenemos

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ahora desarrollamos sin alterar el orden:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Además,

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$A^2 + AB + BA + B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Coincide con el cálculo directo. No puede sustituirse $AB + BA$ por $2AB$, porque $AB \neq BA$.
Error que debes vigilar: aplicar de forma automática la fórmula escalar $A^2 + 2AB + B^2$; solo sería válida en este contexto si $AB = BA$.

Ejercicio 2

Buscamos todas las matrices de orden 2, por lo que partimos de

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Los dos órdenes del producto son

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+z & 2y+t \\ 2z & 2t \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & x+2y \\ 2z & z+2t \end{pmatrix}.$$

La igualdad $AB = BA$ obliga a igualar las entradas correspondientes:

$$2x + z = 2x, \qquad 2y + t = x + 2y, \qquad 2z = 2z, \qquad 2t = z + 2t.$$

La primera y la cuarta ecuación dan $z = 0$; la segunda da $t = x$. La tercera se cumple siempre y y queda libre. Por tanto,

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}}, \qquad x, y \in \mathrm{R}.$$

Comprobación:

$$A \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & x+2y \\ 0 & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} A.$$

Error que debes vigilar: proponer algunas matrices que funcionan no determina todas las soluciones; es imprescindible comenzar con una matriz genérica.

Ejercicio 3

Calculamos las primeras potencias para reconocer la pauta:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

La entrada $(1, 2)$ aumenta de dos en dos, mientras que la entrada $(3, 3)$ sigue las potencias de -2. La fórmula que sugerimos es

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}}, \qquad n \geq 1.$$

Demostración por inducción.
Caso inicial. Para $n = 1$, la expresión propuesta produce

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = A,$$

por lo que es cierta en el primer valor.
Hipótesis de inducción. Suponemos que para cierto $k \geq 1$,

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{pmatrix}.$$

Paso de k a $k+1$. Multiplicamos por A:

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2+2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k(-2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Esta es exactamente la fórmula propuesta con $n = k+1$. Queda demostrada para todo $n \geq 1$.
Error que debes vigilar: adivinar una fórmula con dos ejemplos no basta: la inducción necesita caso inicial, hipótesis y paso inductivo.

Ejercicio 4

Calculamos las primeras potencias:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

Por tanto,

$$A^3 = A^2 A = -A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^4 = A^2 A^2 = (-I)(-I) = I.$$

Las potencias se repiten en ciclos de longitud 4. Dividimos el exponente:

$$2026 = 4 \cdot 506 + 2.$$

Como $A^4 = I$,

$$A^{2026} = A^{4 \cdot 506 + 2} = (A^4)^{506} A^2 = I^{506} A^2 = A^2.$$

En consecuencia,

$$\boxed{A^{2026} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

Error que debes vigilar: usar el cociente de la división en lugar del resto; el resto es el que determina la posición dentro del ciclo.

Ejercicio 5

La matriz Q tiene dimensión 2×3: sus filas representan las dos aulas y sus columnas, los tres tipos de lote.
La matriz M tiene dimensión 3×2: sus filas representan esos mismos tipos de lote y sus columnas, los dos materiales.
El producto adecuado es QM, porque las dimensiones interiores coinciden:

$$(2 \times 3)(3 \times 2) = 2 \times 2.$$

El resultado tendrá, como necesitamos, una fila por aula y una columna por material. Calculamos:

$$\begin{aligned} QM &= \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8\cdot 2+5\cdot 1+4\cdot 3 & 8\cdot 1+5\cdot 3+4\cdot 2 \\ 6\cdot 2+7\cdot 1+3\cdot 3 & 6\cdot 1+7\cdot 3+3\cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 33 & 31 \\ 28 & 33 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

La interpretación completa es:

- el aula 1 necesita 33 cuadernos y 31 rotuladores;
- el aula 2 necesita 28 cuadernos y 33 rotuladores.

Cada entrada tiene unidades de material, no de lotes.
Error que debes vigilar: elegir MQ solo porque también está definido. Ese producto sería de orden 3×3: sus filas y columnas no representarían las dos aulas y los dos materiales que pide el problema. La interpretación de las dimensiones decide el orden correcto.

Ejercicio 6

Matriz A. Construimos la ampliada $(A \mid I)$ y aplicamos Gauss–Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Primero hacemos $F_3 \leftarrow F_3 - F_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ya tenemos los tres pivotes. Anulamos ahora los elementos situados sobre el tercero y el segundo:

$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

La parte izquierda se ha convertido en I, luego A es invertible y

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Una multiplicación directa da $AA^{-1} = I$.
Matriz B. Reducimos por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solo quedan dos filas no nulas, de modo que la parte izquierda no puede transformarse en I_3. Por tanto, B no es invertible.
Error que debes vigilar: aplicar las operaciones solo a la parte izquierda de la ampliada; cada transformación debe afectar a la fila completa, incluido el bloque identidad.

Ejercicio 7

En cada apartado debemos conservar el orden de los factores.

a) Partimos de $A^TX = B$. Como A^T está a la izquierda de X, multiplicamos ambos miembros por $(A^T)^{-1}$ a la izquierda:

$$(A^T)^{-1}A^TX = (A^T)^{-1}B.$$

Por tanto,

$$\boxed{X = (A^T)^{-1}B}.$$

También puede escribirse $X = (A^{-1})^TB$.

b) Aislamos primero el producto que contiene X:

$$XA + C = B \quad \Longrightarrow \quad XA = B - C.$$

Como A está a la derecha de X, multiplicamos por A^{-1} a la derecha:

$$\boxed{X = (B - C)A^{-1}}.$$

c) En $AXB = 2C$, eliminamos A desde la izquierda y B desde la derecha:

$$A^{-1}(AXB)B^{-1} = A^{-1}(2C)B^{-1}.$$

Usando la propiedad asociativa,

$$IXI = 2A^{-1}CB^{-1},$$

así que

$$\boxed{X = 2A^{-1}CB^{-1}}.$$

d) Para sacar factor común, escribimos $3X = X(3I)$:

$$XA - 3X = XA - X(3I) = X(A - 3I) = C.$$

Multiplicamos por $(A - 3I)^{-1}$ a la derecha:

$$\boxed{X = C(A - 3I)^{-1}}.$$

Error que debes vigilar: mover una matriz al otro miembro como si fuese un número. Despejar exige multiplicar por la inversa en el mismo lado en el que aparece el factor.

Ejercicio 8

Partimos de

$$AX - A^2 = BA.$$

Pasamos A^2 al segundo miembro y observamos que los dos sumandos tienen A a la derecha:

$$AX = BA + A^2 = (B + A)A.$$

Para eliminar A situado a la izquierda de X, necesitamos A^{-1} a la izquierda.

Cálculo de A^{-1} mediante Gauss–Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Así,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando la ecuación $AX = (B + A)A$ por A^{-1} a la izquierda:

$$X = A^{-1}(B + A)A.$$

Calculamos por etapas:

$$B+A=\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix},\qquad (B+A)A=\begin{pmatrix}3&4\\1&3\end{pmatrix},$$

y, por último,

$$X=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\1&3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}}.$$

Comprobación. Tenemos

$$AX=\begin{pmatrix}3&4\\1&3\end{pmatrix},\qquad A^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}.$$

Luego

$$AX-A^2=\begin{pmatrix}2&2\\1&2\end{pmatrix}.$$

Por otro lado,

$$BA=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\1&2\end{pmatrix}.$$

Ambos miembros coinciden.
Error que debes vigilar: sacar A por el lado equivocado en $BA+A^2$. La igualdad correcta es $(B+A)A$, no $A(B+A)$.

Ejercicio 9

La ecuación es

$$AX-2X=B.$$

Como X aparece a la derecha en ambos términos, escribimos $2X=(2I)X$ y sacamos factor común:

$$(A-2I)X=B.$$

Calculamos la matriz conocida:

$$A-2I=\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Inversa mediante Gauss–Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\leftarrow F_2-F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&-1&-1&1\end{array}\right).$$

Multiplicamos la segunda fila por -1 y anulamos el elemento situado encima del segundo pivote:

$$\xrightarrow{F_2\leftarrow -F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\leftarrow F_1-F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&1\\0&1&1&-1\end{array}\right).$$

Por tanto,

$$(A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}.$$

Despejamos y operamos:

$$X=(A-2I)^{-1}B=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}}.$$

Comprobación.

$$AX = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$AX - 2X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Error que debes vigilar: escribir $X(A-2I)$. El factor común queda a la derecha de $A-2I$ porque en los dos términos originales X estaba a la derecha.

Ejercicio 10

Aplicamos transformaciones elementales por filas y contamos las filas no nulas de la forma escalonada.
Matriz A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Las dos filas son no nulas y sus pivotes están en columnas distintas. Por tanto,

$$\boxed{\operatorname{rg}(A) = 2}.$$

Matriz B.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \leftarrow F_3 + F_1]{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solo queda una fila no nula:

$$\boxed{\operatorname{rg}(B) = 1}.$$

Matriz C.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \leftarrow F_3 - 3F_1]{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Restamos ahora la segunda fila a la tercera:

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quedan dos filas no nulas, de modo que

$$\boxed{\operatorname{rg}(C) = 2}.$$

Error que debes vigilar: contar filas de la matriz inicial. El rango se lee después de escalonar, cuando las dependencias entre filas se han hecho visibles.

Ejercicio 11

Trabajamos sin dividir por expresiones que dependan de a, para no perder los valores que las anulan.
Matriz D. Restamos la primera fila a la segunda y a la tercera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \leftarrow F_3 - F_1]{F_2 \leftarrow F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

La forma obtenida muestra el valor especial $a = 1$.
Si $a \neq 1$, las tres filas son no nulas y hay un pivote en cada fila. Por tanto,

$$\operatorname{rg}(D) = 3 \qquad \text{si } a \neq 1.$$

Si $a = 1$, sustituimos antes de contar:

$$D \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quedan dos filas no nulas, luego

$$\boxed{\operatorname{rg}(D) = \begin{cases} 3, & a \neq 1, \\ 2, & a = 1. \end{cases}}$$

Matriz E. Eliminamos el primer elemento de la segunda fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 2a & a \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}.$$

Si $a \neq 2$, la segunda fila es no nula y el rango es 2. Si $a = 2$, esa fila se anula y la primera sigue siendo no nula. En consecuencia,

$$\boxed{\operatorname{rg}(E) = \begin{cases} 2, & a \neq 2, \\ 1, & a = 2. \end{cases}}$$

Error que debes vigilar: dividir una fila por $a - 1$ o por $a - 2$ antes de separar casos; esa operación no está permitida precisamente cuando la expresión vale cero.

Ejercicio 12

a) Comprobación de la identidad. Calculamos primero el cuadrado:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Además,

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$A^2 - 3A + I = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La identidad queda comprobada.

b) Obtención de la inversa. Reorganizamos la igualdad:

$$A^2 - 3A + I = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3A - A^2 = I.$$

Sacamos A como factor común:

$$A(3I - A) = I.$$

Como $3I - A$ es una matriz que multiplicada por A produce I, es la inversa de A. En este caso también conmuta con A, porque es una combinación de I y A. Así,

$$A^{-1} = 3I - A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

Comprobamos:

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Error que debes vigilar: concluir que $A^{-1} = 3 - A$. El número 3 debe representarse como $3I$ para poder restarlo de una matriz.

EL SIGUIENTE PASO

Trabaja con una ruta completa

En Eleva2 encuentras el tema de matrices explicado, vídeos ordenados, formularios, colección de ejercicios, pistas para empezar **(protocolo antibloqueo)**, soluciones, resoluciones, directos y el Tutor Eleva2.
Únete gratis a la comunidad de avisos de WhatsApp para recibir nuevos recursos de Matemáticas II y PAU y las novedades de apertura.

ENTRAR EN LOS AVISOS DE WHATSAPP
En pantalla, pulsa el botón. En papel, escanea el código.

ESCANEA PARA UNIRTE