Mates con Andrés · Eleva2

Teorema de Bolzano: el teorema de funciones más pedido en 2.º de Bachillerato

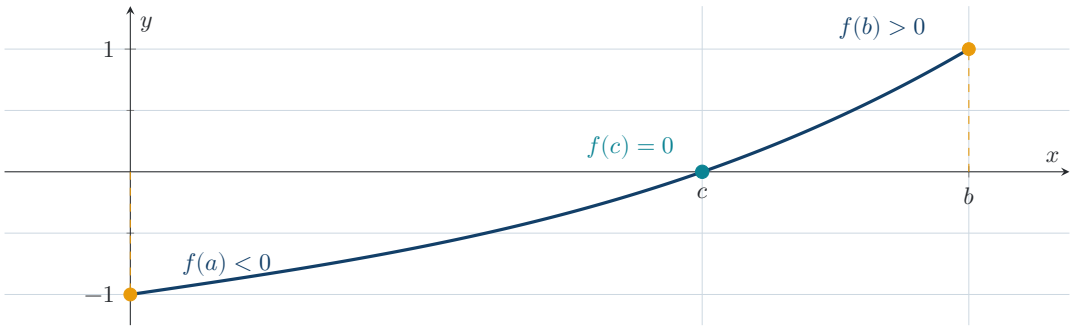
Qué es este recurso.
Una guía para entender y aplicar el teorema de Bolzano sin saltarte ninguna hipótesis. Aprenderás a demostrar que una ecuación tiene solución, aproximar una raíz y justificar que dos funciones se cortan.

Cómo utilizarlo.

1. Comprende primero qué garantiza el teorema y qué no garantiza.
2. Sigue los tres ejemplos completos y copia la estructura de la justificación.
3. Intenta después los tres ejercicios sin consultar las ayudas.
4. Si te bloqueas, lee las pistas de una en una y deja la resolución para el final.

1. La idea que hay detrás de Bolzano

Imagina una curva que puedes dibujar sin levantar el lápiz. Si en $x = a$ está por debajo del eje X y en $x = b$ está por encima, para pasar de un lado al otro tiene que cruzar el eje en algún punto intermedio. Esa es la intuición del teorema de Bolzano.



Teorema de Bolzano. Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y

$$f(a)\, f(b) < 0,$$

entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

En lenguaje cotidiano: una función continua que cambia de signo entre los extremos tiene que pasar por cero. Es un resultado muy intuitivo, pero en un examen la intuición no sustituye la comprobación de las hipótesis.

La lista de comprobación que debes escribir

1. **Define la función.** Si partes de una ecuación o de dos funciones, lleva todo a un miembro.

2. **Calcula el dominio.** Asegúrate de que la función está definida en todo $[a, b]$.
3. **Justifica la continuidad.** Indica por qué es continua en el intervalo completo.
4. **Evalúa los extremos.** Calcula $f(a)$ y $f(b)$.
5. **Comprueba el signo.** Debe cumplirse $f(a)f(b) < 0$.
6. **Concluye con precisión.** Existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Si $f(a) = 0$ o $f(b) = 0$, ya has encontrado un cero en un extremo. No necesitas recurrir a la versión anterior, que exige un cambio de signo estricto.

Lo que garantiza y lo que no garantiza

Bolzano sí garantiza

- La existencia de al menos un cero.
- Un corte con el eje X dentro del intervalo.
- La posibilidad de encerrar una raíz en intervalos cada vez menores si seguimos detectando cambios de signo.

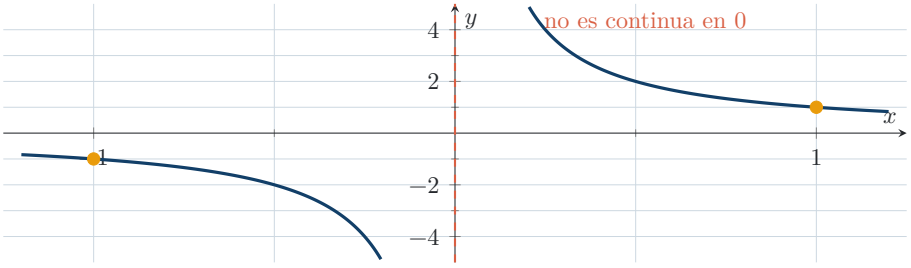
Bolzano no garantiza

- El valor exacto de la raíz.
- Que la raíz sea única.
- Cuántas raíces hay en total.
- Que Ruffini pueda calcularla.

Teorema de existencia, no de cálculo. Bolzano afirma que una raíz existe, pero no proporciona su valor. Repetir la búsqueda de cambios de signo permite aproximarla; ese procedimiento numérico añade cálculos que el enunciado del teorema no realiza por nosotros.

Por qué todas las hipótesis importan

Considera $f(x) = 1/x$ en $[-1, 1]$. Tenemos $f(-1) = -1$ y $f(1) = 1$, pero $0 \notin \mathrm{Dom}(f)$. La función no es continua en todo el intervalo y, de hecho, no se anula.



La idea decisiva. Un cambio de signo en los extremos no basta. La función debe ser continua en todo el intervalo cerrado.

Más adelante sabremos algo más

En Aplicaciones de las derivadas estudiaremos la monotonía. Si, además de aplicar Bolzano, demostramos que la función es estrictamente creciente o decreciente en el intervalo, podremos concluir que el corte es único. Esa información adicional no procede de Bolzano.

2. Tres aplicaciones explicadas

Ejemplo 1 Existencia, aproximación y Ruffini — Raíz de un polinomio

Sea

$$f(x) = x^3 + 2x - 2.$$

Existencia. Su dominio es $\mathbb{R}$. Como es una función polinómica, es continua en todo $\mathbb{R}$ y, en particular, en $[0, 1]$. Además,

$$f(0) = -2 < 0, \qquad f(1) = 1 > 0.$$

Por tanto, $f(0)f(1) < 0$. El teorema de Bolzano garantiza que existe al menos un $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

Aproximación. Evaluamos décimas consecutivas:

$$f(0{,}7) = -0{,}257 < 0, \qquad f(0{,}8) = 0{,}112 > 0.$$

Existe al menos una raíz en $(0{,}7\,;\,0{,}8)$. Esto la *encierra entre dos décimas*, pero todavía no basta para decidir a qué décima se redondea: el punto medio es 0,75. Calculamos

$$f(0{,}75) = -0{,}078125 < 0.$$

Como $f(0{,}75)f(0{,}8) < 0$, existe al menos una raíz en $(0{,}75\,;\,0{,}8)$. Esa raíz se redondea a

$$x \approx 0{,}8$$

con una cifra decimal. Numéricamente se encuentra alrededor de 0,77, dato que sirve como comprobación, no como parte de la demostración de existencia.

¿Podemos obtenerla con Ruffini? Al ser un polinomio mónico con término independiente (-2), las únicas raíces racionales posibles son

$$\pm 1, \qquad \pm 2.$$

Ninguna anula el polinomio. Por tanto, Ruffini no proporciona esta raíz exacta: la raíz que hemos localizado no es racional.

Error que debes vigilar: escribir $x = 0{,}8$ como valor exacto. Bolzano y las evaluaciones anteriores solo justifican una aproximación.

Ejemplo 2 De una ecuación a una función — Existencia sin cálculo exacto

Queremos demostrar que

$$e^{-x} = x + \frac{1}{4}$$

tiene al menos una solución en $[0, 1]$. La ecuación no está todavía en la forma $f(x) = 0$, así que definimos

$$f(x) = e^{-x} - x - \frac{1}{4}.$$

Resolver la ecuación inicial equivale a encontrar un cero de f.

El dominio de f es $\mathbb{R}$. La función es continua por ser suma y diferencia de funciones continuas. En los extremos,

$$f(0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0,$$

$$f(1) = e^{-1} - 1 - \frac{1}{4} = e^{-1} - \frac{5}{4} < 0,$$

porque $e^{-1} < 1$. Se cumple $f(0)f(1) < 0$. Por Bolzano, existe al menos un $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$, es decir,

$$e^{-c} = c + \frac{1}{4}.$$

El teorema demuestra la existencia de una solución, pero no determina su valor exacto ni permite afirmar, por sí solo, que sea única.

Error que debes vigilar: aplicar Bolzano directamente a una igualdad. Primero debes definir una función cuyas raíces sean las soluciones de la ecuación.

Ejemplo 3 Punto de corte entre dos funciones — Función diferencia

Consideramos

$$f(x) = x^2 + 1, \qquad g(x) = 2e^{-x}.$$

Las dos gráficas se cortan cuando $f(x) = g(x)$. Definimos la función auxiliar

$$F(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 1 - 2e^{-x}.$$

La equivalencia clave es

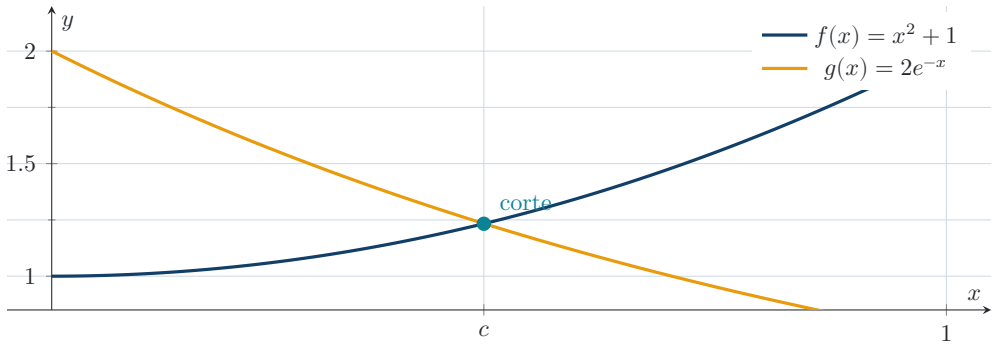
$$F(c) = 0 \iff f(c) - g(c) = 0 \iff f(c) = g(c).$$

El dominio de F es $\mathbb{R}$, y F es continua en todo $\mathbb{R}$. En $[0, 1]$,

$$F(0) = 1 - 2 = -1 < 0,$$

$$F(1) = 2 - \frac{2}{e} > 0,$$

ya que $e > 1$. Por Bolzano, existe al menos un $c \in (0, 1)$ tal que $F(c) = 0$. En consecuencia, $f(c) = g(c)$, por lo que las gráficas se cortan al menos una vez dentro del intervalo.



La gráfica ayuda a interpretar el resultado, pero no sustituye la demostración. Además, Bolzano no afirma que este sea el único punto de corte.

Error que debes vigilar: terminar en $F(c) = 0$ sin traducir el resultado: la conclusión pedida es que $f(c) = g(c)$.

Errores frecuentes que debes evitar

- Aplicar el teorema sin definir la función con la que se trabaja.
- No calcular el dominio o no justificar la continuidad en todo el intervalo.
- Comprobar únicamente que $f(a) \neq f(b)$ en vez de verificar $f(a)f(b) < 0$.
- Concluir que la solución es única o que Bolzano permite calcularla exactamente.
- Utilizar una gráfica o una calculadora como sustituto de la demostración.
- Olvidar que el punto garantizado pertenece a (a, b), no solo a $[a, b]$.

3. Los 3 ejercicios propuestos

Resuélvelos en orden y escribe todas las hipótesis. Las ayudas aparecen después de los tres enunciados.

Ejercicio 1 Una raíz y su aproximación Esencial

Sea

$$f(x) = x^3 + 3x - 3.$$

a) Demuestra que f tiene al menos una raíz en $[0, 1]$.

b) Localiza una raíz entre dos décimas consecutivas y da su aproximación redondeada a una décima, justificando el redondeo.

c) Razona si esa raíz puede obtenerse mediante Ruffini.

Ejercicio 2 Una ecuación con logaritmo Intermedio

Demuestra que la ecuación

$$\ln(x + 2) + x = 1$$

tiene al menos una solución en $[0, 1]$. Utilizando únicamente el teorema de Bolzano, ¿podemos afirmar que la solución es única o calcularla exactamente? Razona la respuesta.

Ejercicio 3 Intersección de dos gráficas Reto

Demuestra que las gráficas

$$y = e^x \qquad \text{e} \qquad y = x + 2$$

se cortan en algún punto del intervalo $[0, 2]$. Explica qué garantiza exactamente el teorema sobre ese punto de corte.

4. Protocolos antibloqueo

Una regla importante. Lee solo hasta recuperar una decisión concreta. «Continúa tú» te devuelve el ejercicio antes de revelar el resultado.

Ejercicio 1 · Una raíz y su aproximación

Pista 1: Reconoce. Para demostrar existencia, piensa en Bolzano. Para aproximar, vuelve a buscar cambios de signo en intervalos más pequeños.
Pista 2: Decide. Justifica que el polinomio es continuo en $[0, 1]$ y calcula los signos en los extremos. Después prueba décimas consecutivas.
Pista 3: Empieza. Evalúa $f(0)$, $f(1)$, $f(0{,}8)$ y $f(0{,}9)$. Para decidir el redondeo, compara también con el punto medio 0,85.
Continúa tú. Enuncia cada aplicación del teorema y termina comprobando los posibles candidatos racionales de Ruffini.

Ejercicio 2 · Una ecuación con logaritmo

Pista 1: Reconoce. Bolzano se aplica a una función, no directamente a una igualdad.
Pista 2: Decide. Pasa todos los términos al mismo miembro y llama f a la función resultante. Antes de hablar de continuidad, calcula el dominio del logaritmo.
Pista 3: Empieza. Toma $f(x) = \ln(x + 2) + x - 1$ y evalúa $f(0)$ y $f(1)$.
Continúa tú. Justifica los signos, aplica el teorema y relee literalmente su conclusión para responder a las preguntas sobre unicidad y valor exacto.

Ejercicio 3 · Intersección de dos gráficas

Pista 1: Reconoce. Dos gráficas se cortan cuando sus expresiones toman el mismo valor.
Pista 2: Decide. Define una función auxiliar f restando las dos expresiones y busca un cambio de signo en $[0, 2]$.
Pista 3: Empieza. Utiliza $f(x) = e^x - x - 2$ y calcula $f(0)$ y $f(2)$.
Continúa tú. Comprueba continuidad, aplica Bolzano y traduce $f(c) = 0$ a la igualdad de las dos gráficas originales.

5. Resoluciones detalladas

Ejercicio 1 · Una raíz y su aproximación

La función

$$f(x) = x^3 + 3x - 3$$

es polinómica. Por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$ y es continua en todo $\mathbb{R}$, en particular en $[0, 1]$.
En los extremos,

$$f(0) = -3 < 0, \qquad f(1) = 1 + 3 - 3 = 1 > 0.$$

Como $f(0)f(1) < 0$, el teorema de Bolzano garantiza que existe al menos un $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$.
Para localizar una raíz entre dos décimas consecutivas, calculamos

$$f(0{,}8) = 0{,}8^3 + 3 \cdot 0{,}8 - 3 = -0{,}088 < 0,$$

$$f(0{,}9) = 0{,}9^3 + 3 \cdot 0{,}9 - 3 = 0{,}429 > 0.$$

La función es continua en $[0{,}8\,;\,0{,}9]$ y cambia de signo. Existe al menos una raíz en

$$(0{,}8\,;\,0{,}9)\,.$$

Encerrar la raíz entre dos décimas no decide aún su redondeo. El punto medio es 0,85:

$$f(0{,}85) = 0{,}85^3 + 3 \cdot 0{,}85 - 3 = 0{,}164125 > 0.$$

Como $f(0{,}8) < 0 < f(0{,}85)$, existe al menos una raíz en $(0{,}8\,;\,0{,}85)$. Por tanto, esa raíz se redondea a una décima como

$$\boxed{x \approx 0{,}8}$$

Para Ruffini, al ser el polinomio mónico, los únicos candidatos racionales son los divisores enteros de (-3):

$$\pm 1, \qquad \pm 3.$$

Ninguno de ellos anula f. Así, Ruffini no permite obtener exactamente la raíz localizada.
Error que debes vigilar: afirmar que Bolzano demuestra una única raíz. Solo hemos probado la existencia de al menos una en los intervalos indicados.

Ejercicio 2 · Una ecuación con logaritmo

Pasamos todos los términos al mismo miembro y definimos

$$f(x) = \ln(x + 2) + x - 1.$$

La ecuación original equivale a $f(x) = 0$.
Para calcular el dominio exigimos

$$x + 2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > -2.$$

Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(f) = (-2, +\infty).$$

El intervalo $[0, 1]$ está contenido en el dominio. Como el logaritmo y la función lineal son continuos allí, f es continua en $[0, 1]$.

En los extremos,

$$f(0) = \ln 2 - 1 < 0$$

porque $\ln 2 < 1$, mientras que

$$f(1) = \ln 3 + 1 - 1 = \ln 3 > 0.$$

Se cumple $f(0)f(1) < 0$. Por el teorema de Bolzano, existe al menos un $c \in (0,1)$ tal que

$$f(c) = 0.$$

Esto significa que

$$\boxed{\ln(c+2) + c = 1}$$

Bolzano no proporciona el valor exacto de c ni permite afirmar, por sí solo, que sea la única solución del intervalo. Para demostrar unicidad necesitaríamos información adicional, por ejemplo un estudio de monotonía.

Error que debes vigilar: olvidar la condición $x+2 > 0$. La continuidad del logaritmo solo puede utilizarse dentro de su dominio.

Ejercicio 3 · Intersección de dos gráficas

Las gráficas se cortan cuando

$$e^x = x + 2.$$

Definimos la función auxiliar

$$f(x) = e^x - x - 2.$$

Su dominio es $\mathbb{R}$. Como es diferencia de funciones continuas, f es continua en $\mathbb{R}$ y, en particular, en $[0,2]$. Evaluamos los extremos:

$$f(0) = 1 - 0 - 2 = -1 < 0,$$

$$f(2) = e^2 - 4 > 0,$$

ya que $e > 2$. Por tanto, $f(0)f(2) < 0$. El teorema de Bolzano garantiza que existe al menos un $c \in (0,2)$ tal que $f(c) = 0$.

Traducimos la conclusión:

$$f(c) = 0 \iff e^c - c - 2 = 0 \iff e^c = c + 2.$$

Así, las dos gráficas tienen al menos un punto común de abscisa $c \in (0,2)$.

$$\boxed{\text{Existe al menos un punto de corte en } (0,2)}$$

El teorema no calcula la abscisa del corte ni afirma que sea el único.

Error que debes vigilar: concluir únicamente que «hay una solución» sin explicar que esa solución corresponde a un punto de corte de las gráficas.

EL SIGUIENTE PASO

Trabaja con una ruta completa

En Eleva2 encuentras una preparación ordenada para Matemáticas II y PAU: tema explicado, vídeos, formularios, colección de ejercicios, **protocolo antibloqueo**, resoluciones, directos y Tutor Eleva2.
Únete gratis a la comunidad de avisos de WhatsApp para recibir nuevos recursos y las novedades de apertura.

ENTRAR EN WHATSAPP
En pantalla, pulsa el botón; en papel, escanea el código.

ESCANEA PARA UNIRTE