Mates con Andrés · Eleva2

¿Cómo se resuelven las 7 indeterminaciones de límites que existen?

Qué es este recurso.
Una guía para reconocer y resolver las siete indeterminaciones de límites. Desarrolla paso a paso los siete ejemplos del vídeo, añade una segunda resolución para el caso 1^∞ y propone doce límites nuevos con ayuda graduada y resoluciones completas.

Cómo utilizarlo.

1. Estudia primero cómo se diagnostica y transforma cada indeterminación.
2. Intenta después los doce límites sin ayuda.
3. Si te bloqueas, consulta las pistas de una en una.
4. Lee la resolución únicamente después de haberlo intentado.

1. Las siete indeterminaciones

Al calcular un límite, la sustitución inicial sirve para **diagnosticar** la situación. Si aparece una forma indeterminada, no significa que el límite no exista ni que su resultado sea «indeterminado». Significa que la sustitución directa no aporta información suficiente y que debemos transformar la expresión.

Dos límites que producen la misma forma indeterminada pueden tener resultados distintos. Por eso la forma es el inicio del razonamiento, nunca la respuesta final.

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \infty^0, \qquad 0^0, \qquad 1^\infty.$$

Forma	Transformaciones que conviene considerar
$0/0$	Factorizar, racionalizar, utilizar un límite fundamental o aplicar L'Hôpital cuando proceda.
∞/∞	Comparar términos dominantes o aplicar L'Hôpital.
$\infty - \infty$	Unificar fracciones, multiplicar por el conjugado o efectuar otra transformación algebraica.
$0 \cdot \infty$	Convertir el producto en un cociente de tipo $0/0$ o ∞/∞.
Potencias	Comprobar que la base es positiva, tomar logaritmos y transformar el exponente. En 1^∞, considerar también la fórmula del número e.

Idea decisiva. L'Hôpital solo se aplica directamente a cocientes de tipo $0/0$ o ∞/∞. Una diferencia, un producto o una potencia deben transformarse antes.

2. Cómo se resuelve cada una

Ejemplo 1 Factorización — Forma 0/0

$$L = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}.$$

Al sustituir $x = 2$, numerador y denominador se anulan:

$$\frac{2^2-4}{2^2-2-2} = \frac{0}{0}.$$

La estructura es polinómica, por lo que la factorización permite descubrir el factor que provoca la cancelación:

$$x^2-4 = (x-2)(x+2), \qquad x^2-x-2 = (x-2)(x+1).$$

Así,

$$L = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)}.$$

Para $x \neq 2$ podemos simplificar el factor común. Esto es legítimo en un límite porque estudiamos valores próximos a 2, no el valor de la expresión en el propio punto:

$$L = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x+1} = \frac{4}{3}.$$

$$\boxed{L = \frac{4}{3}}$$

Contraste mediante L'Hôpital. Como la expresión original es un cociente (0/0), también se puede derivar numerador y denominador por separado:

$$L = \lim_{x\to 2} \frac{2x}{2x-1} = \frac{4}{3}.$$

Es correcto, aunque en este caso factorizar muestra mejor la causa de la indeterminación.

Error que debes vigilar: tachar $x-2$ sin factorizar previamente o afirmar que la expresión original está definida en $x = 2$.

Ejemplo 2 Términos dominantes y L'Hôpital — Forma ∞/∞

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+5x-1}{x^2-4}.$$

El numerador y el denominador tienden a $+\infty$, de modo que aparece ∞/∞.

Método 1: términos dominantes. En el numerador domina $3x^2$ y en el denominador domina x^2. Los términos de menor grado crecen más despacio y no determinan el valor final del cociente. Por tanto,

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3.$$

Método 2: L'Hôpital. La forma inicial permite aplicar la regla:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x+5}{2x}.$$

La nueva expresión sigue presentando ∞/∞, así que volvemos a aplicarla:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{2} = 3.$$

$$\boxed{L = 3}$$

En un cociente de polinomios como este, los términos dominantes ofrecen el camino más directo; L'Hôpital sirve como procedimiento alternativo.

Error que debes vigilar: conservar los términos de mayor grado sin respetar sus coeficientes o aplicar L'Hôpital sin volver a comprobar la forma.

Ejemplo 3 Conjugado — Forma $\infty - \infty$

$$L = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - x\right).$$

Los dos términos tienden a $+\infty$, por lo que aparece $\infty - \infty$. Como son expresiones del mismo orden, la resta no se decide a simple vista. Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - x)(\sqrt{x^2 - x} + x)}{\sqrt{x^2 - x} + x}.$$

La diferencia de cuadrados elimina la resta conflictiva:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x}.$$

En el denominador, el término dominante dentro de la raíz es x^2. Además,

$$\sqrt{x^2} = |x| = x \qquad \text{porque } x \to +\infty.$$

Seleccionando los términos dominantes,

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x + x} = -\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{L = -\frac{1}{2}}$$

Error que debes vigilar: escribir siempre $\sqrt{x^2} = x$. La igualdad correcta es $\sqrt{x^2} = |x|$; aquí vale x porque nos dirigimos a $+\infty$.

Ejemplo 4 Producto convertido en cociente — Forma $\infty \cdot 0$

$$L = \lim_{x\to+\infty} x\left(5^{1/x} - 1\right).$$

El primer factor tiende a $+\infty$ y, como $1/x \to 0$, el segundo tiende a $5^0 - 1 = 0$. Tenemos $\infty \cdot 0$, forma a la que L'Hôpital no se aplica directamente.

Escribimos el producto como cociente:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{5^{1/x} - 1}{1/x}.$$

Ahora aparece $(0/0)$. Derivamos numerador y denominador por separado:

$$\frac{d}{dx}\left(5^{1/x} - 1\right) = 5^{1/x} \ln 5 \left(-\frac{1}{x^2}\right), \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

Por L'Hôpital,

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{5^{1/x} \ln 5 (-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} 5^{1/x} \ln 5 = \ln 5.$$

$$\boxed{L = \ln 5}$$

Error que debes vigilar: aplicar L'Hôpital al producto original o olvidar el factor $\ln 5$ al derivar la exponencial.

Ejemplo 5 Logaritmos — Forma ∞^0

$$L = \lim_{x\to+\infty} (e^x - 1)^{\frac{2}{x+1}}.$$

La base tiende a $+\infty$ y el exponente a 0: aparece ∞^0. Para valores suficientemente grandes de x, $e^x - 1 > 0$, de modo que podemos tomar logaritmos.

Sea

$$y = (e^x - 1)^{2/(x+1)}.$$

Entonces

$$\ln y = \frac{2\ln(e^x - 1)}{x+1}.$$

El límite del logaritmo presenta ∞/∞. Aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln y = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x/(e^x-1)}{1} = 2.$$

Como $\ln y \to 2$, deshacemos el logaritmo mediante la función exponencial:

$$y \to e^2.$$

$$\boxed{L = e^2}$$

Error que debes vigilar: concluir que $\infty^0 = 1$ o tomar logaritmos sin justificar antes que la base es positiva.

Ejemplo 6 Identidad logarítmica — Forma 0^0

$$L = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

La base tiende a 0^+ y el exponente a 0, por lo que aparece 0^0. Para $x > 1$, la base es positiva. Definimos

$$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{1/\ln x}$$

y tomamos logaritmos:

$$\ln y = \frac{\ln(1/x)}{\ln x}.$$

Como $\ln(1/x) = -\ln x$, se simplifica exactamente:

$$\ln y = \frac{-\ln x}{\ln x} = -1.$$

No es necesario aplicar L'Hôpital: la identidad elimina el cociente. Al deshacer el logaritmo,

$$y = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$\boxed{L = e^{-1} = \frac{1}{e}}$$

Error que debes vigilar: aplicar L'Hôpital mecánicamente después de haber obtenido una simplificación exacta.

Ejemplo 7 Dos métodos completos Forma 1^∞

$$L = \lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}.$$

La base tiende a 1 y el exponente a $+\infty$. Además, $\cos 2x > 0$ en un entorno de 0, por lo que podemos utilizar logaritmos reales.

Método 1: tomando logaritmos. Sea

$$y = (\cos 2x)^{3/x^2}.$$

Entonces

$$\ln y = \frac{3\ln(\cos 2x)}{x^2}.$$

Al sustituir aparece $(0/0)$. Aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{-6\tan 2x}{2x}.$$

Todavía tenemos $(0/0)$. Como

$$\frac{d}{dx}\tan 2x = 2\sec^2(2x),$$

una segunda aplicación da

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{-12\sec^2(2x)}{2} = -6.$$

Por tanto,

$$y \to e^{-6}.$$

Método 2: fórmula del número e. Si $f(x)\to 1$, $g(x)\to\infty$, la base es positiva cerca del punto y existe el límite transformado, podemos utilizar

$$\lim [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim (f(x)-1)g(x)}.$$

En este caso debemos calcular

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{3(\cos 2x - 1)}{x^2}.$$

Al sustituir aparece $0/0$. Aplicamos L'Hôpital:

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{-6\sin 2x}{2x}.$$

La nueva expresión sigue presentando $0/0$, así que aplicamos de nuevo L'Hôpital:

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{-12\cos 2x}{2} = -6.$$

Por consiguiente,

$$L = e^A = e^{-6}.$$

$$\boxed{L = e^{-6}}$$

Los dos procedimientos son correctos. La fórmula del número e resulta especialmente eficiente al reconocer la estructura; el método logarítmico es más general.

Error que debes vigilar: olvidar la regla de la cadena al derivar $\ln(\cos 2x)$ o utilizar la fórmula de e sin comprobar la positividad de la base.

3. Los 12 límites propuestos

Intenta resolverlos en orden. La dificultad aumenta de forma progresiva y los últimos ejercicios combinan varias decisiones.

Ejercicio 1 Factor común oculto — Esencial

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2-4}.$$

Ejercicio 2 Cociente de polinomios — Esencial

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^4-3x^2+1}{-2x^4+x-6}.$$

Ejercicio 3 Racionalización en un punto — Esencial

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+3x}-2}{x}.$$

Ejercicio 4 Diferencia de radicales — Esencial

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{9x^2+4x}-3x\right).$$

Ejercicio 5 L'Hôpital repetido — Intermedio

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1-3x}{x^2}.$$

Ejercicio 6 Producto con logaritmo — Intermedio

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x.$$

Ejercicio 7 Unificar antes de derivar — Intermedio

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^{2x}-1}-\frac{1}{2x}\right).$$

Ejercicio 8 Potencia de base infinita — Intermedio

$$\lim_{x\to +\infty} (x^2+1)^{1/x}.$$

Ejercicio 9 Potencia con base nula — Intermedio

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}.$$

Ejercicio 10 Fórmula del número e Reto

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{3x}\right)^{2x}.$$

Ejercicio 11 Potencia trigonométrica Reto

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{4/x^2}.$$

Ejercicio 12 Transformación encadenada Reto

$$\lim_{x\to 0^+}(e^x-1)\ln x.$$

4. Protocolos antibloqueo

Una regla importante. Lee solo hasta recuperar una decisión concreta. «Continúa tú» te devuelve el ejercicio antes de revelar el resultado.

Ejercicio 1 · Factor común oculto

Pista 1: Reconoce. Sustituye $x=-2$: tanto el numerador como el denominador se anulan.
Pista 2: Decide. Al ser dos polinomios, busca el factor común responsable de la forma $(0/0)$.
Pista 3: Empieza. Utiliza $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$ y $x^2-4=(x+2)(x-2)$.
Continúa tú. Simplifica únicamente para $x\neq -2$ y evalúa la expresión resultante.

Ejercicio 2 · Cociente de polinomios

Pista 1: Reconoce. Estudia por separado el comportamiento del numerador y del denominador cuando $x\to+\infty$.
Pista 2: Decide. Selecciona directamente el término dominante de cada polinomio.
Pista 3: Empieza. La comparación que controla el límite es $5x^4/(-2x^4)$.
Continúa tú. Simplifica ese cociente y conserva tanto los coeficientes como el signo.

Ejercicio 3 · Racionalización en un punto

Pista 1: Reconoce. La sustitución produce $(0/0)$ y el numerador contiene una diferencia con un radical.
Pista 2: Decide. Multiplica y divide por el conjugado del numerador.
Pista 3: Empieza. El conjugado es $\sqrt{4+3x}+2$; al multiplicar aparecerá $(4+3x)-4$.
Continúa tú. Extrae el factor x, simplifícalo para $x\neq 0$ y sustituye.

Ejercicio 4 · Diferencia de radicales

Pista 1: Reconoce. Los dos términos crecen sin cota y tienen el mismo orden: aparece $\infty - \infty$.
Pista 2: Decide. Utiliza el conjugado para convertir la diferencia en un cociente.
Pista 3: Empieza. Multiplica y divide por $\sqrt{9x^2+4x}+3x$.
Continúa tú. Aplica la diferencia de cuadrados y selecciona después los términos dominantes del cociente obtenido.

Ejercicio 5 · L'Hôpital repetido

Pista 1: Reconoce. La sustitución en el cociente produce $(0/0)$.
Pista 2: Decide. Puedes aplicar L'Hôpital, pero deberás volver a evaluar después de derivar.
Pista 3: Empieza. La primera aplicación conduce a $\lim_{x\to 0} \dfrac{3e^{3x}-3}{2x}$.
Continúa tú. Comprueba la nueva forma y decide si la regla debe aplicarse una vez más.

Ejercicio 6 · Producto con logaritmo

Pista 1: Reconoce. Cuando $x \to 0^+$, $x^2 \to 0$ y $\ln x \to -\infty$.
Pista 2: Decide. L'Hôpital no se aplica al producto; conviértelo en un cociente.
Pista 3: Empieza. Escribe $x^2 \ln x = \dfrac{\ln x}{1/x^2}$.
Continúa tú. Comprueba la forma del cociente y deriva numerador y denominador por separado.

Ejercicio 7 · Unificar antes de derivar

Pista 1: Reconoce. Cada fracción crece en módulo y la resta presenta $\infty - \infty$.
Pista 2: Decide. Reúne las dos fracciones en un único cociente antes de pensar en L'Hôpital.
Pista 3: Empieza. Obtén $\dfrac{2x-(e^{2x}-1)}{2x(e^{2x}-1)}$.
Continúa tú. Verifica la forma $(0/0)$, aplica L'Hôpital y vuelve a evaluar antes de repetirla.

Ejercicio 8 · Potencia de base infinita

Pista 1: Reconoce. La base tiende a $+\infty$ y el exponente a 0.
Pista 2: Decide. La base es siempre positiva; llama y a la potencia y toma logaritmos.
Pista 3: Empieza. Debes estudiar $\ln y = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$.
Continúa tú. Comprueba la nueva indeterminación, aplica L'Hôpital y deshaz el logaritmo al final.

Ejercicio 9 · Potencia con base nula

Pista 1: Reconoce. Por la derecha, la base y el exponente tienden a (0).
Pista 2: Decide. Como $x > 0$, puedes tomar logaritmos y estudiar primero el exponente transformado.
Pista 3: Empieza. Si $y = x^{\sqrt{x}}$, entonces $\ln y = \sqrt{x}\ln x = \dfrac{\ln x}{1/\sqrt{x}}$.
Continúa tú. Aplica L'Hôpital al cociente y recupera después el límite de y.

Ejercicio 10 · Fórmula del número e

Pista 1: Reconoce. La base tiende a 1, el exponente a $+\infty$ y la base es positiva para x grande.
Pista 2: Decide. Utiliza $e^{\lim (f(x)-1)g(x)}$.
Pista 3: Empieza. Aquí $f(x)-1 = 4/(3x)$ y $g(x) = 2x$.
Continúa tú. Calcula el límite del producto y úsalo como exponente de e.

Ejercicio 11 · Potencia trigonométrica

Pista 1: Reconoce. La base tiende a 1 y el exponente a $+\infty$; además, $\cos x > 0$ cerca de 0.
Pista 2: Decide. Toma logaritmos y convierte la potencia en un cociente $(0/0)$.
Pista 3: Empieza. Estudia $\ln y = \dfrac{4\ln(\cos x)}{x^2}$ y recuerda que $(\ln(\cos x))' = -\tan x$.
Continúa tú. Reevalúa después de la primera aplicación de L'Hôpital y deriva de nuevo si la forma continúa.

Ejercicio 12 · Transformación encadenada

Pista 1: Reconoce. Por la derecha, $e^x - 1 \to 0$ y $\ln x \to -\infty$.
Pista 2: Decide. Convierte el producto en un cociente que presente una forma admitida por L'Hôpital.
Pista 3: Empieza. Escribe $(e^x-1)\ln x = \dfrac{\ln x}{1/(e^x-1)}$.
Continúa tú. Aplica L'Hôpital, simplifica el nuevo cociente y vuelve a comprobar su forma antes de continuar.

5. Resoluciones detalladas

Ejercicio 1 · Factor común oculto

La sustitución produce

$$\frac{(-2)^2+(-2)-2}{(-2)^2-4} = \frac{0}{0},$$

por lo que tenemos una indeterminación $(0/0)$. Factorizamos ambos polinomios:

$$x^2+x-2 = (x+2)(x-1), \qquad x^2-4 = (x+2)(x-2).$$

Para $x \neq -2$,

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-4} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-1}{x-2}.$$

La indeterminación ha desaparecido y ya podemos sustituir:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x-1}{x-2} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}.$$

$$\boxed{\frac{3}{4}}$$

Error que debes vigilar: simplificar sumandos. Solo se cancelan factores completos y la igualdad utilizada vale para $x \neq -2$.

Ejercicio 2 · Cociente de polinomios

Cuando $x \to +\infty$, el numerador tiende a $+\infty$ y el denominador a $-\infty$. Aparece la forma ∞/∞.
En el numerador domina $5x^4$; en el denominador domina $-2x^4$. Los demás términos tienen menor grado y crecen más despacio. Seleccionamos directamente esos términos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 1}{-2x^4 + x - 6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^4}{-2x^4} = -\frac{5}{2}.$$

$$\boxed{-\frac{5}{2}}$$

Error que debes vigilar: perder el signo negativo del término dominante del denominador.

Ejercicio 3 · Racionalización en un punto

Al sustituir $x = 0$,

$$\frac{\sqrt{4} - 2}{0} = \frac{0}{0}.$$

La diferencia de radicales sugiere multiplicar por el conjugado:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to0} \frac{(\sqrt{4+3x} - 2)(\sqrt{4+3x} + 2)}{x(\sqrt{4+3x} + 2)} \\ &= \lim_{x\to0} \frac{(4+3x) - 4}{x(\sqrt{4+3x} + 2)} \\ &= \lim_{x\to0} \frac{3x}{x(\sqrt{4+3x} + 2)}. \end{aligned}$$

Para $x \neq 0$, simplificamos el factor x:

$$L = \lim_{x\to0} \frac{3}{\sqrt{4+3x} + 2} = \frac{3}{4}.$$

$$\boxed{\frac{3}{4}}$$

Error que debes vigilar: multiplicar solo el numerador por el conjugado o escribir $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Ejercicio 4 · Diferencia de radicales

La raíz y $3x$ tienden a $+\infty$, de modo que obtenemos $\infty - \infty$. Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{9x^2+4x} - 3x)(\sqrt{9x^2+4x} + 3x)}{\sqrt{9x^2+4x} + 3x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{9x^2 + 4x - 9x^2}{\sqrt{9x^2+4x} + 3x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{\sqrt{9x^2+4x} + 3x}. \end{aligned}$$

Ahora seleccionamos los términos dominantes. Como $x \to +\infty$, $\sqrt{x^2} = |x| = x$, y por tanto

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{\sqrt{9x^2} + 3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{3x + 3x} = \frac{2}{3}.$$

$$\boxed{\frac{2}{3}}$$

Error que debes vigilar: concluir que la diferencia vale cero porque ambos términos crecen como (3x); la cancelación principal obliga a estudiar el siguiente orden.

Ejercicio 5 · L'Hôpital repetido

La sustitución da

$$\frac{e^0 - 1 - 0}{0^2} = \frac{0}{0}.$$

Podemos aplicar L'Hôpital, derivando numerador y denominador por separado:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{3e^{3x} - 3}{2x}.$$

Al sustituir de nuevo continúa apareciendo $(0/0)$, así que la regla puede aplicarse una segunda vez:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{9e^{3x}}{2} = \frac{9}{2}.$$

$$\boxed{\frac{9}{2}}$$

Error que debes vigilar: olvidar el factor 3 de la regla de la cadena al derivar e^{3x}, especialmente en la segunda derivada.

Ejercicio 6 · Producto con logaritmo

Cuando $x \to 0^+$,

$$x^2 \to 0, \qquad \ln x \to -\infty,$$

y aparece $0 \cdot (-\infty)$. Transformamos el producto:

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x^2}.$$

El nuevo cociente presenta $(-\infty)/(+\infty)$, una forma de tipo ∞/∞. Aplicamos L'Hôpital:

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = \lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 0.$$

$$\boxed{0}$$

Error que debes vigilar: interpretar $0 \cdot (-\infty)$ como cero sin transformar la expresión.

Ejercicio 7 · Unificar antes de derivar

Cada fracción crece en módulo cuando $x \to 0$, así que la resta tiene la forma $\infty - \infty$. Unificamos:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{2x - (e^{2x} - 1)}{2x(e^{2x} - 1)}.$$

Ahora sí aparece $(0/0)$. La primera aplicación de L'Hôpital da

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2e^{2x}}{2(e^{2x} - 1) + 4xe^{2x}}.$$

Al sustituir vuelve a aparecer $(0/0)$. Derivamos otra vez:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{-4e^{2x}}{8e^{2x} + 8xe^{2x}} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{-\frac{1}{2}}$$

Error que debes vigilar: aplicar L'Hôpital directamente a la diferencia o derivar $2x(e^{2x} - 1)$ sin la regla del producto.

Ejercicio 8 · Potencia de base infinita

La base tiende a $+\infty$, el exponente a 0 y $x^2+1>0$ para todo x. Estamos ante ∞^0.
Sea $y=(x^2+1)^{1/x}$. Tomando logaritmos,

$$\ln y=\frac{\ln(x^2+1)}{x}.$$

El límite del logaritmo presenta ∞/∞. Por L'Hôpital,

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0,$$

porque en este último cociente domina x^2 en el denominador frente a x en el numerador. Deshacemos el logaritmo:

$$y\to e^0=1.$$

$$\boxed{1}$$

Error que debes vigilar: afirmar que cualquier expresión ∞^0 vale 1 sin calcular el límite del logaritmo.

Ejercicio 9 · Potencia con base nula

Cuando $x\to0^+$, la base x y el exponente $\sqrt{x}$ tienden a 0. La base es positiva en todo el entorno lateral considerado, por lo que podemos tomar logaritmos.
Sea $y=x^{\sqrt{x}}$. Entonces

$$\ln y=\sqrt{x}\ln x=\frac{\ln x}{1/\sqrt{x}}.$$

Este cociente tiene la forma $(-\infty)/(+\infty)$. Aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to0^+}\ln y=\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/(2x^{3/2})}=\lim_{x\to0^+}(-2\sqrt{x})=0.$$

Por tanto,

$$y\to e^0=1.$$

$$\boxed{1}$$

Error que debes vigilar: estudiar un límite bilateral: la expresión real $x^{\sqrt{x}}$ no queda definida en un entorno izquierdo completo de 0.

Ejercicio 10 · Fórmula del número e

La base tiende a 1, el exponente a $+\infty$ y la base es positiva para x suficientemente grande. Podemos aplicar

$$\lim[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim(f(x)-1)g(x)}.$$

Aquí

$$f(x)=1+\frac{4}{3x},\qquad g(x)=2x.$$

El exponente transformado es

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-1)\,g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{3x}\,2x=\frac{8}{3}.$$

Por consiguiente,

$$\boxed{e^{8/3}}$$

Error que debes vigilar: usar como exponente únicamente el numerador (4) o perder el factor (2x) del exponente original.

Ejercicio 11 · Potencia trigonométrica

Al acercarnos a 0, $\cos x \to 1$ y $4/x^2 \to +\infty$, de modo que aparece 1^∞. Además, $\cos x > 0$ cerca de 0. Sea $y = (\cos x)^{4/x^2}$. Tomamos logaritmos:

$$\ln y = \frac{4\ln(\cos x)}{x^2}.$$

Al sustituir aparece $(0/0)$. Aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{-4\tan x}{2x}.$$

La nueva forma sigue siendo $(0/0)$, así que aplicamos la regla una segunda vez:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{-4\sec^2 x}{2} = -2.$$

Deshacemos el logaritmo:

$$y \to e^{-2}.$$

$$\boxed{e^{-2}}$$

Error que debes vigilar: derivar $\ln(\cos x)$ como $1/\cos x$; su derivada es $-\tan x$.

Ejercicio 12 · Transformación encadenada

Cuando $x \to 0^+$,

$$e^x - 1 \to 0, \qquad \ln x \to -\infty,$$

y aparece $0 \cdot (-\infty)$. Lo convertimos en un cociente:

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/(e^x-1)}.$$

Ahora tenemos $(-\infty)/(+\infty)$, por lo que L'Hôpital es aplicable:

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-e^x/(e^x-1)^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-(e^x-1)^2}{xe^x}.$$

La nueva expresión presenta $(0/0)$. Aplicamos L'Hôpital una segunda vez:

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2(e^x-1)e^x}{e^x + xe^x} = 0.$$

$$\boxed{0}$$

Error que debes vigilar: detenerse tras la primera aplicación sin reevaluar la nueva forma o perder el signo negativo al derivar $1/(e^x-1)$.

EL SIGUIENTE PASO

Trabaja con una ruta completa

Dominar una indeterminación aislada es importante; saber cuándo aparece y cómo encaja dentro de una preparación ordenada marca la diferencia. En Eleva2 encuentras el tema explicado, vídeos ordenados, formularios, colección de ejercicios, pistas para empezar **(protocolo antibloqueo)**, soluciones, resoluciones, directos y el Tutor Eleva2.

Únete gratis a la comunidad de avisos de WhatsApp para recibir nuevos recursos de Matemáticas II y PAU y las novedades de apertura.

ENTRAR EN LOS AVISOS DE WHATSAPP

En pantalla, pulsa el botón. En papel, escanea el código.

ESCANEA PARA UNIRTE