Mates con Andrés · Eleva2

Cómo estudiar la continuidad de una función «a trozos»

Qué es este recurso.
Una guía para estudiar de principio a fin la continuidad de una función definida a trozos. Aprenderás a calcular primero el dominio, analizarás dos funciones de referencia y practicarás con seis ejercicios nuevos, pistas graduadas y resoluciones completas.

Cómo utilizarlo.

1. Aprende primero a calcular correctamente el dominio.
2. Sigue los estudios completos de f y g.
3. Intenta los seis ejercicios sin consultar las ayudas.
4. Si te bloqueas, lee las pistas de una en una.
5. Consulta la resolución únicamente después de haberlo intentado.

1. El método paso a paso

1. Calcula el dominio. Para cada trozo, intersecta el intervalo en el que se utiliza con el dominio natural de su expresión. Después une los conjuntos obtenidos. Revisa denominadores, logaritmos, raíces de índice par y cualquier otra restricción.

2. Estudia el interior de cada tramo. Una función elemental es continua en todos los puntos de su dominio. Por eso no es necesario repetir el mismo cálculo punto por punto.

3. Localiza los puntos que requieren atención. Incluye los puntos de cambio, los excluidos del dominio, los ceros de los argumentos de valores absolutos y cualquier singularidad situada dentro de un tramo.

4. Compara laterales y valor. En un punto $x = c$, comprueba

$$c \in \mathrm{Dom}(f), \qquad \lim_{x \to c^-} f(x), \qquad \lim_{x \to c^+} f(x), \qquad f(c).$$

La continuidad exige que el límite bilateral exista y coincida con el valor de la función.

5. Clasifica lo que ocurra. Si existe un límite finito pero falta el valor o es distinto, la discontinuidad es evitable. Si los laterales son finitos y distintos, hay salto finito. Si algún lateral es infinito, aparece una singularidad infinita y puede existir una asíntota vertical.

Idea decisiva. Los puntos de cambio no son necesariamente los únicos puntos problemáticos. Una expresión racional o logarítmica puede introducir una exclusión dentro de su propio tramo.

2. Estudio completo de f

Consideramos

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x+2}, & x\le 0,\\[2mm] \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & 0<x<1,\\[2mm] e^{x-1}, & x\ge 1.\end{cases}$$

Paso 1. Dominio — Primero, siempre

En el primer trozo, $x\le 0$, la expresión racional exige $x+2\neq 0$, de modo que debemos excluir $x=-2$. En el segundo se cumple $0<x<1$: entonces $x\neq 0$ y $1+x>0$. La exponencial del tercer trozo está definida para todo $x\ge 1$. Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{-2\}.$$

Aunque -2 no es un punto de cambio, debe estudiarse porque está dentro del intervalo asignado al tramo racional.

Cada expresión es continua en los puntos de su dominio. Los únicos puntos que requieren un análisis individual son

$$x=-2,\qquad x=0,\qquad x=1.$$

Paso 2. El punto $x=-2$ — Asíntota vertical

El numerador es positivo y el denominador cambia de signo al atravesar -2:

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{2}{x+2}=-\infty,\qquad \lim_{x\to -2^+}\frac{2}{x+2}=+\infty.$$

El punto -2 no pertenece al dominio. La función presenta allí una singularidad infinita —habitualmente llamada discontinuidad infinita— y la recta

$$x=-2$$

es una asíntota vertical.

Paso 3. El punto $x=0$ — Empalme continuo

Por la izquierda utilizamos el primer trozo:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{x+2}=1.$$

Por la derecha corresponde el segundo. La sustitución produce $0/0$, por lo que aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/(1+x)}{1}=1.$$

Como el primer tramo contiene la igualdad,

$$f(0)=\frac{2}{0+2}=1.$$

Así,

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=1,$$

y f es continua en $x=0$.

Paso 4. El punto $x = 1$ — Salto finito

Los dos cálculos son directos:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{\ln(1+1)}{1} = \ln 2, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = e^{1-1} = 1.$$

El tercer tramo incluye el punto, luego

$$f(1) = 1.$$

Los límites laterales son finitos, pero distintos. Por tanto, en $x = 1$ hay una discontinuidad de salto finito cuya amplitud es

$$|1 - \ln 2| = 1 - \ln 2.$$

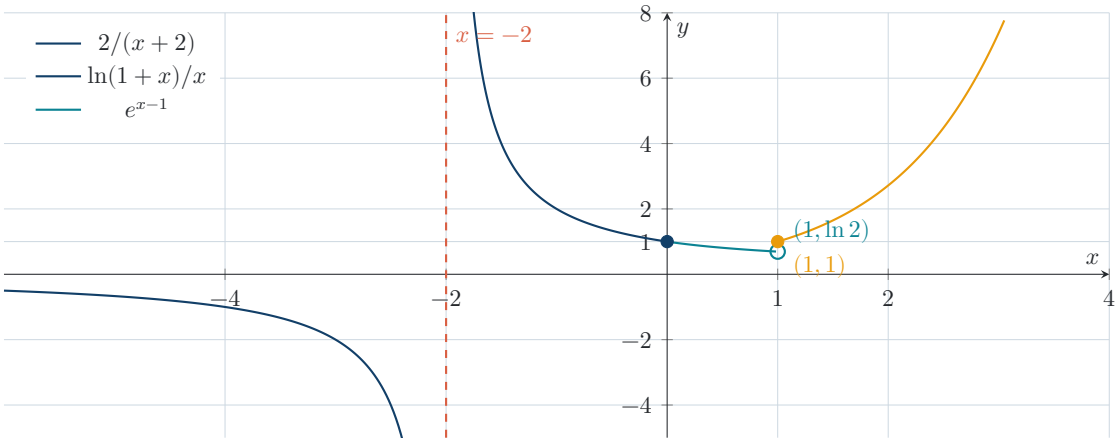
Conclusión. La función es continua en

$$(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty).$$

En $x = -2$ aparece una singularidad infinita con asíntota vertical; en $x = 0$ el empalme es continuo; y en $x = 1$ hay un salto finito.

Error que debes vigilar: mirar únicamente 0 y 1, los puntos de cambio, y olvidar que el denominador del primer tramo se anula en $x = -2$.

La gráfica confirma el estudio — Lectura visual



La gráfica no sustituye los límites, pero permite reconocer la asíntota, el empalme en $(0, 1)$ y las dos alturas distintas del salto en $x = 1$.

3. Estudio completo de g

Sea

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}, & x < 0, \\ ax + b, & 0 \le x < 1, \\ e^{x-1} + \ln x, & x \ge 1. \end{cases}$$

Buscamos los valores de a y b para que g sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Paso 1. Dominio — No depende de a ni de b

En el primer tramo, $x<0$, nunca se alcanza el cero que anularía x^2. El tramo lineal está definido en $0\le x<1$. En el tercero, $x\ge 1$, se cumple $x>0$, así que $\ln x$ está definido. Los intervalos cubren toda la recta y

$$\mathrm{Dom}(g)=\mathbb{R}.$$

Solo debemos estudiar los empalmes $x=0$ y $x=1$.

Paso 2. Continuidad en $x=0$ — Dos veces L'Hôpital

Por la izquierda,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

presenta $0/0$. La primera aplicación de L'Hôpital da

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{2x},$$

que sigue presentando $0/0$. Aplicamos la regla una segunda vez:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Por la derecha y en el propio punto usamos el segundo tramo:

$$\lim_{x\to 0^+}g(x)=b,\qquad g(0)=b.$$

La continuidad en $x=0$ exige

$$b=\frac{1}{2}.$$

Paso 3. Continuidad en $x=1$ — Cálculo directo

Por la izquierda,

$$\lim_{x\to 1^-}g(x)=a+b.$$

Por la derecha y en el punto,

$$\lim_{x\to 1^+}g(x)=e^0+\ln 1=1,\qquad g(1)=1.$$

Por tanto, la segunda condición es

$$a+b=1.$$

Al resolver

$$b=\frac{1}{2},\qquad a+b=1,$$

obtenemos

$$\boxed{a=\frac{1}{2},\qquad b=\frac{1}{2}}$$

Para estos valores, g es continua en todo $\mathbb{R}$. En general, si $b\neq 1/2$, aparece un salto finito en $x=0$; y si $a+b\neq 1$, aparece un salto finito en $x=1$. Cada empalme depende únicamente de su condición correspondiente.

Error que debes vigilar: resolver el sistema sin haber calculado antes el límite $0/0$, o creer que basta con igualar las fórmulas sustituyendo $x=0$ en un tramo que no está definido allí.

4. Los 6 ejercicios propuestos

Resuélvelos en orden. Empieza siempre por el dominio y trabaja en tu cuaderno: las ayudas aparecen después de todos los enunciados.

Ejercicio 1 Dos empalmes directos — Esencial

Estudia la continuidad de

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & x<-1,\\ x^2, & -1\le x<2,\\ 5-x, & x\ge 2. \end{cases}$$

Calcula los límites laterales y clasifica las discontinuidades que aparezcan.

Ejercicio 2 Un valor aislado — Esencial

Estudia la continuidad de

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1}, & x\neq 1,\\ 5, & x=1. \end{cases}$$

Si presenta una discontinuidad evitable, indica qué valor debería asignarse en el punto para repararla.

Ejercicio 3 Primero elimina el valor absoluto — Intermedio

Estudia la continuidad de

$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{|x-2|}{x-2}, & x<3,\\ 2x-2, & x\ge 3. \end{cases}$$

Antes de calcular límites, escribe una definición equivalente sin valor absoluto.

Ejercicio 4 Un parámetro y L'Hôpital — Intermedio

Determina el valor de a para que

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{3x}-1}{x}, & x<0,\\ a+x^2, & x\ge 0 \end{cases}$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$. Describe qué ocurre si a toma otro valor.

Ejercicio 5 Dos condiciones, dos parámetros — Reto

Calcula a y b para que

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{x}, & x<0,\\ ax^2+b, & 0\le x<2,\\ \sqrt{x+7}, & x\ge 2 \end{cases}$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Ejercicio 6 Dominio y singularidades interiores — Reto

Realiza el estudio completo de continuidad de

$$f(x)=\begin{cases} \ln(x+4), & x<-1,\\ \dfrac{x+1}{x-2}, & -1\le x<3,\\ \sqrt{x-3}, & x\ge 3. \end{cases}$$

Determina su dominio, estudia todos los puntos problemáticos, clasifica lo que ocurre e indica sus asíntotas verticales.

5. Protocolos antibloqueo

Una regla importante. Lee solo hasta recuperar una decisión concreta. «Continúa tú» te devuelve el ejercicio antes de revelar el resultado.

Ejercicio 1 · Dos empalmes directos

Pista 1: Reconoce. Las tres expresiones son polinómicas en sus intervalos y no introducen restricciones. Marca los dos puntos de cambio.
Pista 2: Decide. En cada punto escribe, en este orden, límite izquierdo, límite derecho y valor de la función.
Pista 3: Empieza. En $x = -1$, utiliza $x + 2$ por la izquierda y x^2 por la derecha y para calcular el valor.
Continúa tú. Repite la comparación en $x = 2$ con x^2 y $5 - x$, y clasifica lo que obtengas.

Ejercicio 2 · Un valor aislado

Pista 1: Reconoce. El segundo trozo completa el dominio en $x = 1$, pero no determina el límite: para acercarte al punto debes usar el primer trozo.
Pista 2: Decide. La sustitución en el cociente produce $0/0$. Factoriza numerador y denominador antes de comparar el límite con $f(1)$.
Pista 3: Empieza. Escribe $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ y simplifica únicamente para $x \neq 1$.
Continúa tú. Calcula el límite de la expresión simplificada y decide qué valor debería tener la función en el punto.

Ejercicio 3 · Primero elimina el valor absoluto

Pista 1: Reconoce. Además del cambio en $x = 3$, debes revisar dónde se anula $x - 2$. Ese punto afecta al signo del valor absoluto y al denominador.
Pista 2: Decide. Separa los casos $x < 2$ y $x > 2$ antes de combinar esa información con la condición $x < 3$.
Pista 3: Empieza. Para $x < 2$, $|x - 2| = 2 - x$; para $x > 2$, $|x - 2| = x - 2$.
Continúa tú. Escribe la función equivalente, obtén su dominio y compara los laterales en 2 y en 3.

Ejercicio 4 · Un parámetro y L'Hôpital

Pista 1: Reconoce. Los intervalos cubren $\mathbb{R}$ y el único punto de unión es $x = 0$. El cociente del primer tramo no se evalúa en 0, pero sí interviene en el límite izquierdo.
Pista 2: Decide. Al sustituir en ese límite aparece $0/0$, de modo que puedes aplicar L'Hôpital.
Pista 3: Empieza. Deriva numerador y denominador por separado: la derivada de $e^{3x} - 1$ es $3e^{3x}$.
Continúa tú. Iguala el límite izquierdo con el límite derecho y con $f(0)$, sin adelantar el valor de a.

Ejercicio 5 · Dos condiciones, dos parámetros

Pista 1: Reconoce. El dominio es todo $\mathbb{R}$. Los dos empalmes están en $x = 0$ y $x = 2$.
Pista 2: Decide. La sustitución en el primer límite produce $0/0$. Aplica L'Hôpital y después obtén una ecuación de continuidad en cada empalme.
Pista 3: Empieza. Deriva numerador y denominador por separado: la derivada de $\sin(2x)$ es $2\cos(2x)$. En $x = 2$, compara $4a + b$ con el valor del radical.
Continúa tú. Resuelve el sistema de dos ecuaciones y comprueba ambos empalmes sustituyendo los parámetros obtenidos.

Ejercicio 6 · Dominio y singularidades interiores

Pista 1: Reconoce. No empieces por -1 y 3. Intersecta primero cada intervalo con el dominio de su fórmula; aparecerán puntos adicionales.
Pista 2: Decide. En el logaritmo exige $x+4>0$; en el cociente excluye el cero del denominador; en el radical exige $x-3\geq 0$.
Pista 3: Empieza. El primer trozo aporta $(-4,-1)$ y el segundo debe separarse en el punto donde $x-2=0$.
Continúa tú. Une los dominios, estudia los laterales en todos los extremos y puntos de cambio y distingue saltos finitos de comportamientos infinitos.

6. Resoluciones detalladas

Ejercicio 1 · Dos empalmes directos

Los tres intervalos cubren la recta real y las expresiones polinómicas no añaden restricciones. Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}.$$

Solo debemos estudiar $x=-1$ y $x=2$.
En $x=-1$,

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=(-1)+2=1,$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=(-1)^2=1=f(-1).$$

La función es continua en $x=-1$.
En $x=2$,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=2^2=4, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=5-2=3=f(2).$$

Los laterales son finitos y distintos, así que hay una discontinuidad de salto finito.

$$\boxed{f \text{ es continua en } \mathbb{R}\setminus\{2\}}$$

Error que debes vigilar: suponer que todo cambio de fórmula produce una discontinuidad; en $x=-1$ las dos ramas empalman.

Ejercicio 2 · Un valor aislado

El primer trozo está definido salvo en $x=1$, y el segundo asigna precisamente un valor en ese punto. Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}.$$

Fuera de 1, la función racional es continua. En el punto conflictivo, el límite se calcula con el primer trozo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-3)=-2.$$

Sin embargo,

$$f(1)=5.$$

El límite bilateral existe y es finito, pero no coincide con el valor. La discontinuidad en $x=1$ es evitable. Se repararía definiendo

$$f(1)=-2.$$

$$\boxed{f \text{ es continua en } \mathbb{R}\setminus\{1\}}$$

Error que debes vigilar: utilizar el valor aislado $f(1)=5$ para calcular el límite; los valores próximos a 1 pertenecen al otro tramo.

Ejercicio 3 · Primero elimina el valor absoluto

La expresión del primer tramo tiene un denominador $x-2$, de modo que $x=2$ queda excluido. Además, el signo de $x-2$ cambia en ese punto.
Si $x<2$, entonces $|x-2|=2-x=-(x-2)$, y

$$x+\frac{|x-2|}{x-2}=x-1.$$

Si $2<x<3$, entonces $|x-2|=x-2$, y

$$x+\frac{|x-2|}{x-2}=x+1.$$

La función equivalente es

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x<2,\\ x+1, & 2<x<3,\\ 2x-2, & x\geq 3.\end{cases}$$

y

$$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{2\}.$$

En $x=2$,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=1, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=3.$$

Los laterales son finitos y distintos. Aunque 2 no pertenece al dominio, el comportamiento corresponde a un salto finito.
En $x=3$,

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=3+1=4, \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x)=2\cdot 3-2=4=f(3).$$

El empalme en 3 es continuo.

$$\boxed{f \text{ es continua en } (-\infty,2)\cup(2,+\infty)}$$

Error que debes vigilar: estudiar solo $x=3$ y olvidar que el valor absoluto y el denominador obligan a revisar también $x=2$.

Ejercicio 4 · Un parámetro y L'Hôpital

El primer tramo solo se utiliza para $x<0$, así que allí $x\neq 0$. El segundo está definido para $x\geq 0$. En consecuencia,

$$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$$

para todo $a\in\mathbb{R}$, y solo debemos estudiar $x=0$.
Por la izquierda aparece $0/0$:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{3x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3e^{3x}}{1}=3,$$

donde L'Hôpital es aplicable porque hemos comprobado previamente la indeterminación.
Por la derecha y en el punto,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=a, \qquad f(0)=a.$$

La continuidad exige $a=3$.

$$\boxed{a=3}$$

Para cualquier $a\neq 3$, los laterales son finitos y distintos, por lo que aparece una discontinuidad de salto finito en $x=0$.
Error que debes vigilar: aplicar L'Hôpital a toda la función a trozos; la regla se utiliza únicamente en el límite del cociente que presenta $0/0$.

Ejercicio 5 · Dos condiciones, dos parámetros

En $x < 0$, el denominador x no se anula. El polinomio del segundo tramo y el radical del tercero están definidos en sus respectivos intervalos; para $x \geq 2$, $x + 7 > 0$. Así,

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$

Los puntos de unión son 0 y 2.
En $x = 0$, la sustitución produce $0/0$. Aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2\cos(2x)}{1} = 2.$$

Por la derecha y en el punto,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = b = f(0).$$

La primera condición es

$$b = 2.$$

En $x = 2$,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4a + b,$$

mientras que

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \sqrt{2+7} = 3 = f(2).$$

La segunda condición es

$$4a + b = 3.$$

Sustituyendo $b = 2$, resulta $4a = 1$, de donde

$$\boxed{a = \frac{1}{4}, \qquad b = 2}$$

Con estos valores los dos empalmes son continuos y f es continua en todo $\mathbb{R}$.
Error que debes vigilar: derivar $\sin(2x)$ como $\cos(2x)$ y olvidar el factor 2 de la regla de la cadena.

Ejercicio 6 · Dominio y singularidades interiores

Estudiamos cada tramo antes de calcular ningún límite.
Para el logaritmo necesitamos $x + 4 > 0$. Al intersectar con $x < -1$, obtenemos

$$(-4, -1).$$

El cociente se utiliza en $[-1, 3)$, pero exige $x \neq 2$, de modo que aporta

$$[-1, 2) \cup (2, 3).$$

El radical, utilizado para $x \geq 3$, está definido en todo ese intervalo y aporta $[3, +\infty)$. Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(f) = (-4, 2) \cup (2, +\infty).$$

Debemos estudiar -4, -1, 2 y 3.
Al aproximarnos a -4 por valores del dominio,

$$\lim_{x\to -4^+} \ln(x + 4) = -\infty.$$

Así, $x = -4$ es una asíntota vertical. La función no está definida a la izquierda de ese punto ni en el propio punto.
En $x = -1$,

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \ln 3, \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{-1+1}{-1-2} = 0 = f(-1).$$

Los laterales son finitos y distintos: hay un salto finito.

En $x = 2$, el numerador tiende a $3 > 0$ y el denominador cambia de signo:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty.$$

La recta $x = 2$ es otra asíntota vertical. Este punto problemático se encuentra dentro del segundo tramo, no en un cambio de fórmula.
Finalmente, en $x = 3$,

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{3+1}{3-2} = 4, \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \sqrt{3-3} = 0 = f(3).$$

También aquí aparece un salto finito.
Por tanto, f es continua en

$$(-4,-1) \cup (-1,2) \cup (2,3) \cup (3,+\infty),$$

tiene saltos finitos en -1 y 3, y presenta asíntotas verticales en -4 y 2.

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = (-4,2) \cup (2,+\infty)}$$

Error que debes vigilar: afirmar que el dominio es $\mathbb{R} \setminus \{2\}$: el logaritmo elimina también todos los valores $x \leq -4$.

EL SIGUIENTE PASO

Trabaja con una ruta completa

Saber estudiar una función a trozos es importante; reconocer el dominio, los límites laterales y el tipo de discontinuidad dentro de una preparación ordenada marca la diferencia. En Eleva2 encuentras el tema explicado, vídeos ordenados, formularios, colección de ejercicios, pistas para empezar **(protocolo antibloqueo)**, soluciones, resoluciones, directos y el Tutor Eleva2.
Únete gratis a la comunidad de avisos de WhatsApp para recibir nuevos recursos de Matemáticas II y PAU y las novedades de apertura.

ENTRAR EN LOS AVISOS DE WHATSAPP
En pantalla, pulsa el botón. En papel, escanea el código.

ESCANEA PARA UNIRTE