# Mates con Andrés · Eleva2

## Cómo resolver integrales en 2.º de Bachillerato

**Qué es este recurso.** Una guía para elegir cómo empezar una integral y calcular su primitiva. Cada paso se ilustra con un ejemplo resuelto.

**Cómo utilizarla.** Recorre las preguntas de arriba abajo. En cuanto reconozcas tu integral, abre ese paso. Si no encaja, continúa con la pregunta siguiente.


| Qué mirar | Por dónde empezar | Pág. |
|---|---|---|
| **01. ¿Puedo simplificarla?** | Separa sumas y saca constantes. | 1 |
| **02. ¿Es una inmediata simple?** | Busca su familia en la tabla. | 2 |
| **03. ¿Veo una función interior?** | Derívala y compara con el integrando. | 3 |
| **04. ¿Es un cociente de polinomios?** | Compara grados, prueba el logaritmo y mira las raíces. | 4 |
| **05. ¿Queda un producto?** | Deriva un factor e integra el otro. | 6 |
| **06. ¿Qué cambio la simplifica?** | Pasa toda la integral a la nueva variable. | 7 |


## 01. Separa sumas y saca constantes

**La integral de una suma es la suma de las integrales.** Esta propiedad también permite separar restas.

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Si una constante $c$ multiplica a una función, puedes sacarla de la integral.**

$$\int c\,f(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Puedes leer esta segunda igualdad en los dos sentidos. Si necesitas introducir dentro un factor numérico, compénsalo dividiendo fuera por ese mismo número.

### Ejemplo resuelto

Primero separa los tres sumandos. Después saca los números que multiplican a cada función.

$$\begin{aligned}\int (6x^2 - 4\cos x + 3)\,\mathrm{d}x &= 6\int x^2\,\mathrm{d}x - 4\int \cos x\,\mathrm{d}x + 3\int 1\,\mathrm{d}x \\ &= 6\,\frac{x^3}{3} - 4\sin x + 3x + k = 2x^3 - 4\sin x + 3x + k.\end{aligned}$$

Así obtienes una **primitiva**, es decir, una función cuya derivada es el integrando. Escribe una sola constante $k \in \mathbb{R}$ al final para recoger todas las primitivas en el intervalo.

**¿Cómo sabes si está bien?** Deriva tu respuesta. Aquí obtienes $6x^2 - 4\cos x + 3$, exactamente la función de partida.

# 02. Integrales inmediatas simples

Si aparece directamente $x$, busca la familia en la primera columna. En la segunda tienes la igualdad completa. En todas las filas, $k$ es una constante real.

| Familia | Primitiva |
|---|---|
| Constante | $\int c\,\mathrm{d}x = cx + k$ |
| Potencia ($n \neq -1$) | $\int x^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$ |
| Logaritmo neperiano | $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + k$ |
| Exponencial natural | $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + k$ |
| Exponencial de base $a$ | $\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + k$ |
| Coseno | $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + k$ |
| Seno | $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + k$ |
| Tangente | $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + k$ |
| Arcotangente | $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + k$ |
| Arcoseno | $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + k$ |
| Arcocoseno | $\int \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arccos x + k$ |

En la exponencial de base $a$ se cumple $a > 0$ y $a \neq 1$. Por ejemplo, $\int 2^x\,\mathrm{d}x = 2^x/\ln 2 + k$.

## ¿Qué hago con una raíz o con una $x$ debajo?

Escríbelas como potencias. Fíjate en el exponente antes de sumar uno.

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \int (x^{1/2} + x^{-2} - x^{-1})\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{x} - \ln\lvert x\rvert + k.$$

**El exponente $-1$ tiene su propia fila.** La regla de la potencia te haría dividir por cero. La primitiva de $1/x$ es $\ln\lvert x\rvert$, como puedes comprobar derivando.

## Del coseno simple al compuesto

En la primera integral, el argumento del coseno es $x$ y su derivada es 1. En la segunda, el argumento es $f(x) = x^2$ y delante aparece su derivada, $2x$.

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + k \qquad \int 2x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \sin(x^2) + k.$$

En la tabla del paso 03 encontrarás el coseno en la misma fila.

# 03. Integrales inmediatas compuestas

Compara con el paso 02. Al derivar cada primitiva, la **regla de la cadena** aporta el factor $f'(x)$ y recuperas el integrando. En la fila del coseno, $\big[\sin(f(x))+k\big]' = f'(x)\cos(f(x))$.

| Familia | Primitiva |
|---|---|
| Constante | $\int c\,f'(x)\,\mathrm{d}x = c\,f(x)+k$ |
| Potencia ($n\neq -1$) | $\int f'(x)\,[f(x)]^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+k$ |
| Logaritmo neperiano | $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert f(x)\rvert+k$ |
| Exponencial natural | $\int f'(x)\,e^{f(x)}\,\mathrm{d}x = e^{f(x)}+k$ |
| Exponencial de base $a$ | $\int f'(x)\,a^{f(x)}\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^{f(x)}}{\ln a}+k$ |
| Coseno | $\int f'(x)\cos(f(x))\,\mathrm{d}x = \sin(f(x))+k$ |
| Seno | $\int f'(x)\sin(f(x))\,\mathrm{d}x = -\cos(f(x))+k$ |
| Tangente | $\int \dfrac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}\,\mathrm{d}x = \tan(f(x))+k$ |
| Arcotangente | $\int \dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(f(x))+k$ |
| Arcoseno | $\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(f(x))+k$ |
| Arcocoseno | $\int \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,\mathrm{d}x = \arccos(f(x))+k$ |

## Una potencia con un número que falta

En $\int x(3x^2-1)^4\,\mathrm{d}x$, la función interior es $f(x)=3x^2-1$. Al derivarla obtienes $6x$ y en la integral solo hay $x$. Introduce el 6 y compénsalo fuera.

$$\int x(3x^2-1)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int 6x(3x^2-1)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\frac{(3x^2-1)^5}{5}+k = \frac{(3x^2-1)^5}{30}+k.$$

**Compruébalo.** El 5 de la potencia y el $6x$ de la función interior dan $30x$. Al dividir por 30 recuperas el integrando.

## Otros ejemplos de la tabla

**Exponencial.** En $2x\,e^{x^2}$, el $2x$ ya es la derivada del exponente. Por tanto, $\int 2x\,e^{x^2}\,\mathrm{d}x = e^{x^2}+k$.

**Seno.** La derivada de $3x$ es 3. Compensa ese factor y conserva el signo de la primitiva del seno.

$$\int \sin(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 3\sin(3x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cos(3x)+k.$$

**Arcoseno.** En $\sqrt{1-(2x)^2}$ el interior del cuadrado es $2x$. Su derivada es 2.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arcsin(2x)+k.$$

**¿Falta un número o falta una función?** En $x\,e^{2x}$, la derivada del exponente es 2. Ningún número convierte el factor $x$ en 2. Deja este producto para el paso 05.

# 04. Integrales racionales

Tienes una racional cuando el integrando es un cociente de polinomios $P(x)/Q(x)$. Si ya has cancelado los factores comunes posibles, compara los grados del numerador y del denominador.

## 1. Si el grado de arriba es mayor o igual, divide

En $\int \frac{x^2+1}{x-1}\,\mathrm{d}x$, el numerador tiene grado 2 y el denominador, grado 1. La división permite separar una parte polinómica y un resto.

$$\underbrace{x^2+1}_{\text{dividendo}} = \underbrace{(x-1)}_{\text{divisor}}\underbrace{(x+1)}_{\text{cociente}} + \underbrace{2}_{\text{resto}}.$$

Divide esa igualdad entre $x-1$. El cociente se integra tal cual. El resto queda sobre el denominador original.

$$\int \frac{x^2+1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int \left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + k.$$

Si el resto es cero, basta con integrar el cociente. Si queda una fracción, sigue con ella en el punto 2.

## 2. ¿Arriba está la derivada de abajo?

Si el grado de arriba ya es menor, calcula $Q'(x)$. Cuando el numerador sea un múltiplo de $Q'(x)$, puedes integrar antes de buscar raíces.

$$\int \frac{x+2}{x^2+4x+8}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+2)}{x^2+4x+8}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+8| + k.$$

La derivada del denominador es $2x+4 = 2(x+2)$. Ese es el motivo del factor $1/2$.

**Si el numerador no encaja, mira las raíces de $Q$.** Con factores lineales, ve a fracciones simples. Si aparece un factor cuadrático sin raíces reales, ve a completar el cuadrado.

## 3. Raíces reales. Descompón en fracciones simples

Factoriza el denominador. Cada raíz real aporta términos que podrás integrar como logaritmos o como potencias. Primero hay que averiguar qué numerador corresponde a cada término.

### Dos raíces distintas

En $\int \frac{3x+1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$, el denominador se descompone como $(x-1)(x+1)$. Escribe una fracción por cada factor.

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Multiplica por el denominador común. La identidad que queda es $3x+1 = A(x+1) + B(x-1)$. Elige valores que anulen un término cada vez.

$$x=1 \implies 4 = 2A \implies A = 2, \qquad x=-1 \implies -2 = -2B \implies B = 1.$$

Así, $\int \frac{3x+1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x-1| + \ln|x+1| + k$.

**Paso 04 · Integrales racionales (continuación)**

## Una raíz repetida

En $\displaystyle\int \frac{3x+1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$, la raíz 1 aparece dos veces. Escribe un término con $x-1$ y otro con $(x-1)^2$.

$$\frac{3x+1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} \quad\Longrightarrow\quad 3x+1 = A(x-1)+B.$$

Con $x=1$ obtienes $B=4$. Al igualar los coeficientes de $x$ obtienes $A=3$. El primer término se integra como logaritmo y el segundo como potencia de exponente $-2$.

$$\int \frac{3x+1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x = 3\ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + k.$$

**¿Y si la raíz aparece tres veces?** Para el factor $(x-a)^3$, escribe las tres fracciones con denominadores $x-a$, $(x-a)^2$ y $(x-a)^3$. Con multiplicidad $m$, llega hasta la potencia $m$.

## 4. Factor cuadrático sin raíces reales. Completa el cuadrado

Retoma $Q(x) = x^2+4x+8$. Al completar el cuadrado queda $Q(x) = (x+2)^2+4$. Así ves que no tiene raíces reales y aparece la forma $1+t^2$ de la arcotangente.

## Si arriba queda una constante

Saca 4 del denominador. Dentro del cuadrado queda $f(x) = (x+2)/2$, cuya derivada es $1/2$. Introduce ese factor y compénsalo fuera.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{Q(x)} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot 2\int \frac{1/2}{1+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+2}{2}\right) + k.$$

## Si arriba hay una parte de $Q'(x)$ y algo más

Ya viste que el numerador $x+2$ da solo un logaritmo. Cambia ahora el numerador a $x+3$. Como $Q'(x) = 2x+4$, escribe $x+3 = \frac{1}{2}Q'(x)+1$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2+4x+8}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{Q'(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{Q(x)} \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+8| + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+2}{2}\right) + k.\end{aligned}$$

**Qué decide el resultado.** Con el mismo denominador, $x+2$ da un logaritmo, 1 da una arcotangente y $x+3$ reúne los dos.

## Si se mezclan un factor lineal y uno cuadrático

Reserva un numerador constante para el factor lineal y uno de la forma $Bx+C$ para el cuadrático. Por ejemplo,

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Al quitar denominadores, $x+1 = (A+B)x^2+Cx+A$. Comparando coeficientes obtienes $A=1,\ B=-1,\ C=1$. Integra los tres términos.

$$\int \frac{x+1}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln|x^2+1| + \arctan x + k.$$

# 05. Integración por partes

ALPES e ILATE son dos reglas mnemotécnicas para elegir qué factor derivar. Aquí no las utilizamos. Prueba a derivar un factor y a integrar el otro. Si la nueva integral se complica, prueba al revés.

Llama $u$ al factor que vas a derivar y $\mathrm{d}v$ al que vas a integrar, con su diferencial. Calcula $\mathrm{d}u$ y $v$ y sustituye en la fórmula.

$$\boxed{\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u}$$

## Un producto de polinomio y exponencial

Vuelve a $\int x\,e^{2x}\,\mathrm{d}x$. Si derivas $x$, queda 1. Además, ya sabes integrar $e^{2x}$. Escribe las dos decisiones antes de sustituir.

$$\begin{aligned} u &= x & \mathrm{d}u &= \mathrm{d}x,\\ \mathrm{d}v &= e^{2x}\,\mathrm{d}x & v &= \tfrac{1}{2}e^{2x}. \end{aligned}$$

$$\int x\,e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + k.$$

Si pruebas al revés, al integrar $x$ obtienes $x^2/2$ y la nueva integral contiene $x^2e^{2x}$. El grado ha subido. Vuelve a la elección en la que baja.

## Un producto escondido

En $\int \ln x\,\mathrm{d}x$, imagina $\ln x \cdot 1$. Toma $u = \ln x$ y $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$. Entonces $\mathrm{d}u = (1/x)\,\mathrm{d}x$ y $v = x$.

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + k.$$

## ¿Y si una sola vez no basta?

Si queda un polinomio de menor grado, repite. Por ejemplo, llamando $J = \int x^2e^x\,\mathrm{d}x$, la primera aplicación da $J = x^2e^x - 2\int xe^x\,\mathrm{d}x$. La segunda da $\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + k$. Reuniendo las constantes,

$$J = e^x(x^2 - 2x + 2) + k.$$

Si reaparece la integral original, llámala $I$ y despéjala. Por ejemplo, toma $I = \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x$. Deriva el factor trigonométrico en las dos aplicaciones.

$$\begin{aligned} I &= e^x\sin x - \int e^x\cos x\,\mathrm{d}x = e^x\sin x - (e^x\cos x + I),\\ 2I &= e^x(\sin x - \cos x) \quad\Longrightarrow\quad I = \tfrac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + k. \end{aligned}$$

# 06. Cambio de variable

Cuando lo anterior no encaje, busca un cambio que elimine la dificultad. Si el enunciado te propone uno, empieza por escribirlo y deriva la relación para obtener el nuevo diferencial.

## Una raíz en el denominador

En $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x+1}}$, la raíz impide tratar el integrando como un cociente de polinomios en $x$. Tómala como nueva variable.

$$t=\sqrt{x+1} \quad\Longrightarrow\quad x=t^2-1, \qquad \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t.$$

Sustituye la raíz y $\mathrm{d}x$. Ahora toda la integral está en $t$. Como arriba y abajo hay el mismo grado, divide usando $2t=2(t+1)-2$.

$$\int \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int\left(2-\frac{2}{1+t}\right)\mathrm{d}t=2t-2\ln|1+t|+k.$$

Deshaz el cambio para responder en la variable del enunciado.

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x+1}}=2\sqrt{x+1}-2\ln\left|1+\sqrt{x+1}\right|+k.}$$

## Dos raíces con índices distintos

En $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}$, los índices son 2 y 3. Su mínimo común múltiplo es 6. Con $t=\sqrt[6]{x}$, quedan $x=t^6$, $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$ y $\mathrm{d}x=6t^5\,\mathrm{d}t$.

$$\int \frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}\,\mathrm{d}t=6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}\right)+k.$$

**Antes de dar por terminado el ejercicio**, comprueba que solo queda la variable original y deriva tu respuesta. Si recuperas el integrando con su signo y sus factores, has terminado.

EL SIGUIENTE PASO

## Trabaja con una ruta completa

Ya has visto cómo elegir el método para cada integral. Prueba ahora con una que no hayas resuelto, escribe qué detalle te permite reconocerla y comprueba tu primitiva derivando.
En Eleva2 puedes seguir trabajando Matemáticas II con los temas explicados, vídeos ordenados, formularios, colecciones de ejercicios, protocolos antibloqueo, soluciones y resoluciones detalladas. También tienes planificación, directos y el Tutor Eleva2 para avanzar y revisar tus dudas con el método de Mates con Andrés.

DESCUBRE ELEVA2

Pulsa el botón o escanea el QR.