Mates con Andrés · Eleva2

7 parejas de integrales que se parecen

El detalle que cambia la forma de resolverlas

Qué es este recurso. Catorce integrales para aprender a elegir el procedimiento. Compara las dos de cada pareja, identifica qué ha cambiado e intenta resolverlas. Dispones de pistas progresivas y de todas las resoluciones, comprobadas por derivación.

Cómo utilizarlo. Trabaja en tu cuaderno. Antes de calcular, escribe qué método probarías y por qué. Si te bloqueas, lee una sola pista. Consulta la resolución después de intentarlo.

1. Ejercicios propuestos

Calcula ambas integrales y explica qué detalle cambia la estrategia. Añade la constante $k \in \mathbb{R}$. Cada integral tiene su propia constante.

Pareja 1 Pistas / Resoluciones

A. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$ B. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$

Pareja 2 Pistas / Resoluciones

A. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$ B. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

Pareja 3 Pistas / Resoluciones

A. $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ B. $\displaystyle\int xe^{x}\,dx$

Pareja 4 Pistas / Resoluciones

A. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ B. $\displaystyle\int x\ln x\,dx$

Pareja 5 Pistas / Resoluciones

A. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx$ B. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$

Pareja 6 Pistas / Resoluciones

A. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ B. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

Pareja 7 Pistas / Resoluciones

A. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x}\,dx$ B. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

2. Protocolos antibloqueo

Lee solo la ayuda que necesites. Las letras A y B corresponden a las integrales de la página anterior. Las pistas no dan el resultado final.

Pareja 1

Ir a la resolución

A: $x/(x^2+1)$ B: $x/(x^2+1)^2$

Pista 1 En ambas, busca x^2+1 y calcula su derivada. ¿Qué factor numérico falta junto a x?

Pista 2 **A:** compara con f'/f. **B:** escribe $(x^2+1)^{-2}$ multiplicando a x.

Pista 3 Introduce un 2 dentro y compénsalo con $1/2$ fuera. En B, la potencia tiene exponente -2, no -1.

Continúa tú Aplica en A la regla del logaritmo y en B la de potencia compuesta. Comprueba el signo de la primitiva de B.

Pareja 2

Ir a la resolución

A: $1/(x^2+1)$ B: $1/(x^2-1)$

Pista 1 El numerador es el mismo. ¿Qué cambia al sustituir la suma de cuadrados por una diferencia?

Pista 2 **A:** escribe $1+x^2$ en el denominador. **B:** factoriza x^2-1.

Pista 3 A encaja en una inmediata. Para B, plantea $\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ y elimina denominadores.

Continúa tú Reconoce A en la tabla. En B, halla los coeficientes de las fracciones y después integra cada término; revisa los valores absolutos.

Pareja 3

Ir a la resolución

A: xe^{x^2} B: xe^{x}

Pista 1 Mira el exponente de cada exponencial. ¿Su derivada aparece como factor en el integrando?

Pista 2 **A:** deriva x^2. **B:** piensa qué ocurre si derivas x y si integras e^x.

Pista 3 En A solo falta un número. En B prueba $u=x$, $dv=e^x\,dx$ en $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Continúa tú Ajusta A y aplica su fórmula. En B calcula du y v, y resuelve la integral más sencilla que aparece.

Pareja 4

Ir a la resolución

A: $(\ln x)/x$ B: $x\ln x$

Pista 1 Trabajamos con $x>0$. Calcula la derivada de $\ln x$ y comprueba en cuál de las dos aparece.

Pista 2 **A:** escribe $(1/x)(\ln x)^1$. **B:** prueba a derivar el logaritmo e integrar el factor x.

Pista 3 En A reconoce $f'f^n$. En B, con $u=\ln x$ y $dv=x\,dx$, calcula $v\,du$ y simplifícalo.

Continúa tú Integra la potencia compuesta de A. En B aplica partes y resuelve la integral restante antes de simplificar.

Protocolos antibloqueo Parejas 5–7

Pareja 5

Ir a la resolución

A: $\operatorname{sen} x \cos x$ B: $\operatorname{sen}^2 x$

Pista 1 La derivada de $\operatorname{sen} x$ es $\cos x$. ¿Está ese factor en las dos integrales?

Pista 2 **A:** identifica una potencia compuesta. **B:** recuerda $\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$.

Pista 3 En A puedes tomar $f(x) = \operatorname{sen} x$. En B despeja $\operatorname{sen}^2 x$ en la identidad y separa los dos sumandos.

Continúa tú Integra A sin añadir factores. En B, al integrar $\cos(2x)$, compensa la derivada del argumento $2x$.

Pareja 6

Ir a la resolución

A: $e^x/(1+e^x)$ B: $e^x/(1+e^{2x})$

Pista 1 Compara el numerador con la derivada de cada denominador. ¿La relación es un número constante en los dos casos?

Pista 2 **A:** busca f'/f. **B:** reescribe e^{2x} como el cuadrado de una función.

Pista 3 En B, toma $f(x) = e^x$: el denominador es $1 + [f(x)]^2$ y el numerador coincide con $f'(x)$.

Continúa tú Aplica la regla apropiada a cada integral. Para A, decide si necesitas valor absoluto; para B, verifica la regla de la cadena.

Pareja 7

Ir a la resolución

A: $x/(1+x)$ B: $\sqrt{x}/(1+x)$

Pista 1 En A tienes un cociente de polinomios del mismo grado. En B la raíz impide hacer esa misma división polinómica.

Pista 2 **A:** escribe $x = (1+x) - 1$. **B:** prueba $t = \sqrt{x}$ y expresa x en función de t.

Pista 3 En B, $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$ y la integral pasa a $2\int t^2/(1+t^2)\,dt$. No olvides el diferencial.

Continúa tú Descompón ambos cocientes. En B usa $t^2 = (1+t^2) - 1$, integra y vuelve a la variable x.

> **Antes de mirar la resolución.** Anota el primer paso que ya puedes justificar. Si buscas una integral compuesta, escribe su función interior y su derivada. Si recurres a partes o a un cambio de variable, comprueba que la nueva integral es más sencilla.

3. Resoluciones detalladas

Trabajamos en intervalos del dominio. Los factores en naranja se introducen y se compensan sin cambiar el integrando. En dominios separados, la constante puede ser distinta en cada intervalo.

Pareja 1 · Un cuadrado cambia la regla

Ambos integrandos están definidos para todo $x \in \mathbb{R}$, pues $x^2+1>0$.

A. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$: logaritmo compuesto

Reconocemos la estructura. La regla $\int f'(x)/f(x)\,dx = \ln|f(x)|+k$ exige la derivada del denominador en el numerador. Aquí

$$f(x)=x^2+1, \qquad f'(x)=2x.$$

Solo falta el número 2. Lo introducimos dentro y lo compensamos fuera con $1/2$:

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1|+k.$$

Como x^2+1 siempre es positivo, podemos retirar el valor absoluto.

$$\boxed{\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+k.}$$

Comprobación. Derivamos y recuperamos el integrando:

$$\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+k\right)' = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}.$$

B. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$: potencia compuesta

Reescribimos antes de integrar. Si derivamos el denominador completo obtenemos $4x(x^2+1)$, que no es un múltiplo constante de x. En cambio, al subir el denominador aparece la potencia $(x^2+1)^{-2}$:

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int x(x^2+1)^{-2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{-2}\,dx.$$

Tomamos $f(x)=x^2+1$ y $n=-2$ en la regla de potencia compuesta. Sumamos uno al exponente y dividimos por ese nuevo exponente:

$$\frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{-2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{-1}}{-1}+k.$$

$$\boxed{\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2(x^2+1)}+k.}$$

Comprobación. $\left[-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1}+k\right]' = -\frac{1}{2}(-1)(x^2+1)^{-2}\,2x = \frac{x}{(x^2+1)^2}$.

> **Qué cambia.** En A integramos f'/f; en B, $f'f^{-2}$. La misma función interior participa en dos fórmulas diferentes.
> **Error que debes vigilar.** Una fracción no es de tipo logaritmo solo por tener una función en el denominador. Hay que comparar con su derivada.

Pareja 2 · Un signo cambia el denominador

A. $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$: arcotangente

El orden de los sumandos no altera la suma: $x^2+1 = 1+x^2$. Reconocemos directamente la derivada de la arcotangente:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

No hay ningún factor que ajustar. Por tanto,

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + k.}$$

Comprobación. $(\arctan x + k)' = 1/(1+x^2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

B. $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$: fracciones simples

Clasificamos la racional. El grado del numerador es menor que el del denominador, así que no hacemos división. Factorizamos la diferencia de cuadrados:

$$x^2-1 = (x-1)(x+1).$$

Hay dos factores lineales distintos. Planteamos una fracción para cada uno:

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Calculamos los coeficientes. Al reducir a común denominador e igualar los numeradores obtenemos la identidad polinómica

$$1 = A(x+1) + B(x-1).$$

En esta identidad podemos sustituir $x=1$ y $x=-1$, aunque esos valores estén excluidos del cociente original:

$$x=1: \quad 1=2A \implies A=\frac{1}{2}, \qquad x=-1: \quad 1=-2B \implies B=-\frac{1}{2}.$$

Integramos por separado. Las derivadas de $x-1$ y de $x+1$ son 1, de modo que no necesitamos nuevos ajustes:

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx.$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + k.}$$

La expresión se aplica en cada intervalo $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ y $(1,+\infty)$. Conservamos los valores absolutos.

Comprobación. Al derivar y sumar las fracciones,

$$\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} = \frac{(x+1)-(x-1)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x^2-1}.$$

Qué cambia. La suma $1+x^2$ encaja en la arcotangente. La diferencia x^2-1 se factoriza y conduce a dos logaritmos.
Error que debes vigilar. La regla de la arcotangente exige una suma $1+[f(x)]^2$. No puedes aplicarla sustituyendo el signo más por un signo menos.

Pareja 3 · El exponente decide el primer paso

Los dos integrandos están definidos en todo $\mathbb{R}$.

A. $\int xe^{x^2}\,dx$: exponencial compuesta

Localizamos el exponente y su derivada. La fórmula que buscamos es

$$\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + k.$$

Aquí $f(x) = x^2$, de modo que $f'(x) = 2x$. En el integrando ya aparece x; falta únicamente el factor 2.

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\,dx.$$

Ahora están presentes la función exponencial compuesta y la derivada de su exponente.

$$\boxed{\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + k.}$$

Comprobación. $\left(\frac{1}{2}e^{x^2} + k\right)' = \frac{1}{2}e^{x^2}\,2x = xe^{x^2}$.

B. $\int xe^{x}\,dx$: integración por partes

Elegimos qué derivar. El exponente es ahora x, cuya derivada es 1. El factor x que lo acompaña no se absorbe con un ajuste numérico. Probamos partes: derivar x lo convierte en 1, mientras que e^x se integra fácilmente.

$$u = x \qquad dv = e^x\,dx$$

$$du = dx \qquad v = e^x$$

Aplicamos la fórmula. Sustituimos en $\int u\,dv = uv - \int v\,du$:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + k.$$

La integral que queda es inmediata. Sacamos factor común e^x para escribir el resultado de forma compacta:

$$\boxed{\int xe^x\,dx = (x-1)e^x + k.}$$

Comprobación. Usamos la regla del producto:

$$\big((x-1)e^x + k\big)' = e^x + (x-1)e^x = xe^x.$$

Qué cambia. En A, el factor x permite reconocer la derivada del exponente x^2. En B, derivar ese factor mediante partes simplifica la integral.
Error que debes vigilar. No se integra un producto multiplicando las primitivas de sus factores. La comprobación por derivación permite detectar ese fallo.

Pareja 4 · Dividir por x o multiplicar por x

En las dos integrales trabajamos con $x > 0$, porque aparece $\ln x$.

A. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$: potencia compuesta

Reordenamos los factores. Escribimos el cociente como producto:

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x}(\ln x)^1.$$

La función interior es $f(x) = \ln x$ y su derivada es $f'(x) = 1/x$. Ambas aparecen exactamente; no hace falta compensar ningún número.

Aplicamos la regla $\int f' f^n\,dx = f^{n+1}/(n+1) + k$ con $n = 1$:

$$\int \frac{1}{x}(\ln x)^1\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + k.$$

$$\boxed{\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + k.}$$

Comprobación. $\left(\frac{1}{2}(\ln x)^2 + k\right)' = \frac{1}{2}\,2\ln x\,\frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}$.

B. $\displaystyle\int x\ln x\,dx$: integración por partes

Elegimos para simplificar. La derivada del logaritmo es $1/x$, pero ahora el factor que lo acompaña es x. Probamos derivar el logaritmo e integrar x:

$$u = \ln x \qquad dv = x\,dx$$

$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

Esta elección es útil porque $v\,du = (x/2)\,dx$, una potencia sencilla. Aplicamos partes y simplificamos antes de seguir:

$$\begin{aligned}\int x\ln x\,dx &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + k.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + k.}$$

Comprobación. La regla del producto produce dos términos y el último se cancela:

$$\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + k\right)' = x\ln x + \frac{x^2}{2}\frac{1}{x} - \frac{x}{2} = x\ln x.$$

Qué cambia. En A está la derivada de $\ln x$, por lo que reconocemos una potencia compuesta. En B elegimos partes porque la integral restante se simplifica.
Error que debes vigilar. Que aparezca un logaritmo no obliga a integrar por partes. Antes comprueba si también aparece su derivada.

Pareja 5 · Un factor trigonométrico cambia la estrategia

Ambos integrandos están definidos para todo $x \in \mathbb{R}$.

A. $\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$: potencia compuesta

Reconocemos una función y su derivada. Tomamos

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \qquad f'(x) = \cos x.$$

Al reordenar el producto obtenemos $f'(x)[f(x)]^1$. Aplicamos la regla de potencia compuesta con exponente 1:

$$\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \int \cos x \, (\operatorname{sen} x)^1 \, dx = \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{2} + k.$$

$$\boxed{\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + k.}$$

Comprobación. $\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + k\right)' = \frac{1}{2}\, 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} x \cos x$.

B. $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$: identidad del ángulo doble

Comprobamos por qué no sirve el paso anterior. Ahora falta el factor $\cos x$, que es la derivada de la base $\operatorname{sen} x$. No podemos inventarlo y sacarlo fuera: depende de x.

Usamos la identidad $\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$. Al despejar,

$$2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos(2x) \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Separamos e integramos. Aplicamos linealidad:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int 1 \, dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx.$$

En la última integral el argumento es $f(x) = 2x$ y $f'(x) = 2$. Ajustamos ese número:

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{1}{2} \int 2 \cos(2x) \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) + k.$$

Al sustituir, los dos factores $1/2$ dan $1/4$; reunimos las constantes en una sola k.

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + k.}$$

Comprobación.

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + k\right)' = \frac{1}{2} - \frac{2\cos(2x)}{4} = \frac{1 - \cos(2x)}{2} = \operatorname{sen}^2 x.$$

> **Qué cambia.** En A aparece la derivada del seno como factor. En B transformamos el cuadrado mediante una identidad antes de integrar.
> **Error que debes vigilar.** $\operatorname{sen}^2 x$ significa $(\operatorname{sen} x)^2$, no $\operatorname{sen}(x^2)$. Tampoco puede integrarse como potencia compuesta si falta la derivada de la base.

Pareja 6 · La exponencial puede formar un cuadrado

Los denominadores son positivos y ambos integrandos están definidos en todo $\mathbb{R}$.

A. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$: logaritmo compuesto

Derivamos el denominador. Para $f(x) = 1+e^x$ tenemos $f'(x) = e^x$, exactamente el numerador. Aplicamos la regla del logaritmo:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \ln|1+e^x| + k.$$

Como $e^x > 0$, también $1+e^x > 0$, así que podemos retirar el valor absoluto.

$$\boxed{\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \ln(1+e^x) + k.}$$

Comprobación. $\big(\ln(1+e^x)+k\big)' = e^x/(1+e^x)$.

B. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$: arcotangente compuesta

Revisamos el intento logarítmico. La derivada del denominador es $2e^{2x}$. Para obtenerla a partir de e^x habría que multiplicar por $2e^x$, que no es una constante. Por tanto, no basta con introducir y compensar un número.

Buscamos otra estructura. La propiedad de las potencias permite escribir

$$e^{2x} = (e^x)^2, \qquad \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{e^x}{1+(e^x)^2}.$$

Ahora reconocemos la fórmula

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \arctan(f(x)) + k.$$

Elegimos $f(x) = e^x$, cuya derivada también es e^x. El numerador ya es el que necesitamos; no hay factores que ajustar.

$$\boxed{\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \arctan(e^x) + k.}$$

Comprobación. Derivamos la arcotangente y multiplicamos por la derivada de su argumento:

$$\big(\arctan(e^x)+k\big)' = \frac{1}{1+(e^x)^2}\,e^x = \frac{e^x}{1+e^{2x}}.$$

> **Qué cambia.** En A la función interior del logaritmo es todo el denominador. En B la función interior de la arcotangente es e^x, cuyo cuadrado aparece sumado a 1.
> **Error que debes vigilar.** El ajuste de una integral compuesta permite introducir factores numéricos constantes. No permite sacar fuera de la integral un factor que depende de x.

Pareja 7 · La raíz pide una nueva variable

A. $\int \frac{x}{1+x}\,dx$: descomposición algebraica

El numerador y el denominador tienen el mismo grado. Dividimos; de forma equivalente, escribimos $x = (1+x)-1$:

$$\frac{x}{1+x} = \frac{(1+x)-1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}.$$

Integramos ambos términos. El segundo es logarítmico, ya que la derivada de $1+x$ es 1:

$$\boxed{\int \frac{x}{1+x}\,dx = x - \ln|1+x| + k.}$$

Válida en $(-\infty,-1)$ y en $(-1,+\infty)$, con una constante propia en cada intervalo.

Comprobación. $\big(x - \ln|1+x| + k\big)' = 1 - 1/(1+x) = x/(1+x)$.

B. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$: cambio de variable

Eliminamos la raíz. El integrando está definido para $x \geq 0$. Hacemos el cambio en $x > 0$:

$$t = \sqrt{x} \quad \Longrightarrow \quad x = t^2, \qquad dx = 2t\,dt.$$

Sustituimos todo, incluido el diferencial. Deben desaparecer todas las x:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = \int \frac{t}{1+t^2}\,2t\,dt = 2\int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt.$$

La nueva integral es racional. Como los grados son iguales, dividimos escribiendo $t^2 = (1+t^2)-1$:

$$\begin{aligned} 2\int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt &= 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\ &= 2t - 2\arctan t + k. \end{aligned}$$

Volvemos a la variable original. Sustituimos $t = \sqrt{x}$:

$$\boxed{\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = 2\sqrt{x} - 2\arctan(\sqrt{x}) + k.}$$

Comprobación. Para $x > 0$, al aplicar la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned} \big(2\sqrt{x} - 2\arctan(\sqrt{x}) + k\big)' &= \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \\ &= \frac{x}{(1+x)\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{1+x}. \end{aligned}$$

La expresión de la primitiva se extiende continuamente a $x = 0$, donde vale k. La comprobación anterior se ha hecho en el intervalo abierto $(0,+\infty)$.

Qué cambia. A se simplifica directamente en x. B se transforma primero con $t = \sqrt{x}$; después se simplifica y aparece una arcotangente.
Error que debes vigilar. Al cambiar de variable, sustituye también dx. Olvidar $dx = 2t\,dt$ cambia la integral y conduce a un resultado incorrecto.

4. Qué detalle debes reconocer

Después de resolver las catorce integrales, tapa esta tabla y vuelve a justificar el primer paso de cada pareja. El objetivo es reconocer la estructura antes de hacer cuentas.

	Integral A	Integral B
1	f'/f: logaritmo compuesto.	$f'f^{-2}$: potencia compuesta.
2	$1+x^2$: arcotangente inmediata.	x^2-1: factorizar y descomponer.
3	La derivada del exponente está presente salvo un factor constante.	Derivar x simplifica el producto: partes.
4	$1/x$ es la derivada de $\ln x$.	Derivar el logaritmo simplifica la nueva integral: partes.
5	$\cos x$ es la derivada de $\operatorname{sen} x$.	Falta ese factor: identidad del ángulo doble.
6	El numerador es la derivada del denominador.	El denominador es $1+(e^x)^2$: arcotangente compuesta.
7	División o descomposición algebraica.	Cambio $t=\sqrt{x}$ y simplificación posterior.

Para comprobar que lo has aprendido. Vuelve a las parejas en las que necesitaste ayuda. Escribe qué función interior has reconocido o por qué has elegido otro método. Resuelve de nuevo y deriva tu resultado: debe aparecer exactamente el integrando original.

EL SIGUIENTE PASO

Trabaja con una ruta completa

Elegir el método es una parte del trabajo. Para preparar las integrales necesitas también practicar, revisar tus errores y avanzar con una explicación a la que puedas volver cuando te atasques.
En Eleva2 tienes el tema explicado, vídeos ordenados, formularios, colecciones de ejercicios y pistas para empezar. Puedes contrastar tus intentos con las soluciones y las resoluciones detalladas, seguir una planificación flexible y apoyarte en los directos y en el Tutor Eleva2.
Conoce cómo puedes trabajar Matemáticas II y preparar la PAU con el método de Mates con Andrés.

DESCUBRE ELEVA2

En pantalla, pulsa el botón.
En papel, escanea el QR.