Mates con Andrés · Eleva2

20 integrales para practicar el cálculo de primitivas

Edición Tutor Eleva2 · Pistas y resoluciones paso a paso

Qué es este recurso. Practica cómo reconocer una integral inmediata, elegir entre fracciones simples, partes o sustitución y hallar una primitiva que cumpla los datos del enunciado.

Cómo utilizarlo. Resuelve primero en tu cuaderno. Si te bloqueas, abre el protocolo del mismo número, lee una sola pista y vuelve a intentarlo. Los enlaces junto a cada ejercicio te llevan a sus pistas o a su resolución.

1. Ejercicios propuestos

Calcula la familia de primitivas de cada integral, salvo que el enunciado pida una función concreta. Usamos $k \in \mathbb{R}$ para la constante de integración.

1 Halla la primitiva de $f(x) = \dfrac{2x^3 - \sqrt{x} + 5}{x}$ que cumple $F(1) = 4$. **Pistas** / **Solución**

2 $\displaystyle\int x^2(5x^3 - 4)^4\,dx$ **Pistas** / **Solución**

3 $\displaystyle\int \frac{3x - 2}{3x^2 - 4x + 7}\,dx$ **Pistas** / **Solución**

4 $\displaystyle\int \cos(2x)\, e^{\operatorname{sen}(2x)}\,dx$ **Pistas** / **Solución**

5 $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2 + 9}\,dx$ **Pistas** / **Solución**

6 $\displaystyle\int x^2 \cos(x^3 + 2)\,dx$ **Pistas** / **Solución**

7 $\displaystyle\int x\, 2^{x^2 - 1}\,dx$ **Pistas** / **Solución**

8 $\displaystyle\int \frac{x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^2 + 1}\,dx$ **Pistas** / **Solución**

Ejercicios propuestos

Ejercicios 09–20

9 $\displaystyle\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,dx$ — Pistas / Solución

10 $\displaystyle\int \frac{4x-1}{(x-2)^2}\,dx$ — Pistas / Solución

11 $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2+2x+5}\,dx$ — Pistas / Solución

12 $\displaystyle\int x^3 \ln x\,dx$ — Pistas / Solución

13 $\displaystyle\int \arctan x\,dx$ — Pistas / Solución

14 $\displaystyle\int (x^2+2x)e^x\,dx$ — Pistas / Solución

15 $\displaystyle\int e^x \cos x\,dx$ — Pistas / Solución

16 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx$ — Pistas / Solución

17 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$ — Pistas / Solución

18 $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$ — Pistas / Solución

19 La función f cumple $f''(x)=6x-2$. Su tangente en $x=1$ tiene pendiente 4 y su gráfica pasa por $(0,5)$. Determina f. — Pistas / Solución

20 Sea $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 1,\\ 3x^2, & x>1.\end{cases}$ Halla su primitiva F con $F(0)=5$ y justifica que es derivable en $x=1$. — Pistas / Solución

2. Protocolos antibloqueo

Lee una sola pista y vuelve a tu cuaderno. Pasa a la siguiente únicamente si sigues sin saber qué escribir.

1 · Una primitiva que pasa por un punto

Halla la primitiva de $f(x) = \dfrac{2x^3 - \sqrt{x} + 5}{x}$ que cumple $F(1) = 4$.

Pista 1 El denominador es un único término. ¿Qué ocurre si divides cada sumando del numerador entre x?

Pista 2 Escribe la raíz como una potencia. Hay un exponente al que no podrás aplicar la regla de sumar uno.

Pista 3 La función queda $2x^2 - x^{-1/2} + 5/x$. ¿Qué función tiene por derivada $1/x$?

Continúa tú Integra, añade k y usa el punto $(1, 4)$ para fijar su valor.

2 · Una potencia de un polinomio

$$\int x^2(5x^3 - 4)^4 \, dx$$

Pista 1 Fíjate en la base de la potencia. ¿Qué factor aparece fuera del paréntesis?

Pista 2 Deriva $5x^3 - 4$ y compara el resultado con x^2.

Pista 3 Te falta un factor 15. Puedes introducirlo si compensas fuera por $1/15$.

Continúa tú Sube una unidad el exponente y conserva los dos divisores que aparecen.

3 · Un cociente de polinomios

$$\int \frac{3x - 2}{3x^2 - 4x + 7} \, dx$$

Pista 1 Deriva el denominador antes de intentar factorizarlo.

Pista 2 ¿Cuántas veces cabe el numerador en esa derivada?

Pista 3 Con $q(x) = 3x^2 - 4x + 7$ se cumple $2(3x - 2) = q'(x)$.

Continúa tú Aplica la regla $\int q'(x)/q(x)\,dx = \ln|q(x)| + k$ y conserva el factor exterior.

4 · Una exponencial con seno

$$\int \cos(2x)\, e^{\operatorname{sen}(2x)} \, dx$$

Pista 1 Mira primero el exponente de e. ¿Qué relación tiene con el coseno que lo acompaña?

Pista 2 Al derivar $\operatorname{sen}(2x)$ también tienes que derivar $2x$.

Pista 3 Escribe el integrando como $\frac{1}{2}[2\cos(2x)]e^{\operatorname{sen}(2x)}$.

Continúa tú Aplica la regla de la exponencial y revisa el factor exterior al derivar.

Protocolos antibloqueo Ejercicios 05–08

5 · Una suma de cuadrados

$$\int \frac{1}{4x^2+9}\,dx$$

El denominador es una suma de cuadrados. Busca el molde $1+[f(x)]^2$.

Pista 1

¿Qué número puedes sacar como factor común para que aparezca ese 1?

Pista 2

Escribe $4x^2+9=9[1+(2x/3)^2]$. La derivada de $2x/3$ es $2/3$.

Pista 3

Introduce esa derivada en el numerador, compensa fuera y simplifica.

Continúa tú

6 · Un coseno con argumento cúbico

$$\int x^2\cos(x^3+2)\,dx$$

Compara el factor x^2 con la derivada del argumento del coseno.

Pista 1

Si $f(x)=x^3+2$, ¿qué factor numérico falta para tener $f'(x)$?

Pista 2

Introduce un 3 junto a x^2 y un $1/3$ delante de la integral.

Pista 3

Piensa qué función trigonométrica da un coseno positivo al derivarla.

Continúa tú

7 · Una exponencial de base dos

$$\int x\,2^{x^2-1}\,dx$$

Observa la base de la exponencial. ¿Qué constante aparece al derivar 2^x?

Pista 1

Compara el factor x con la derivada del exponente x^2-1.

Pista 2

Introduce $2x$ dentro de la integral y deja $1/2$ fuera.

Pista 3

Al integrar una exponencial de base 2, recuerda qué sucede con $\ln 2$.

Continúa tú

8 · Un cociente de grados tres y dos

$$\int \frac{x^3+2x^2-x+3}{x^2+1}\,dx$$

Compara los grados. ¿Puedes separar una parte polinómica?

Pista 1

Divide x^3+2x^2-x+3 entre x^2+1. Los términos del cociente son x y 2.

Pista 2

El resto es $-2x+1$. Sepáralo en dos numeradores sobre el mismo denominador.

Pista 3

Busca la derivada del denominador en uno de esos términos y una arcotangente en el otro.

Continúa tú

Protocolos antibloqueo Ejercicios 09–12

9 · Dos raíces en el denominador

$$\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,dx$$

¿Qué dos números anulan el denominador?

Pista 1

Factoriza y prepara una fracción de numerador constante por cada factor lineal.

Pista 2

Al quitar denominadores queda $5x-1 = A(x+1) + B(x-2)$. Prueba con las dos raíces.

Pista 3

Integra cada fracción y escribe el argumento de cada logaritmo entre barras de valor absoluto.

Continúa tú

10 · Un factor doble

$$\int \frac{4x-1}{(x-2)^2}\,dx$$

¿Cuántas veces aparece el factor $x-2$ en el denominador?

Pista 1

Prepara un término con $x-2$ y otro con $(x-2)^2$ en el denominador.

Pista 2

De $4x-1 = A(x-2) + B$ obtienes un coeficiente al usar $x=2$ y el otro comparando los términos en x.

Pista 3

Una fracción se integra con un logaritmo. En la otra, escribe el denominador como potencia de exponente negativo.

Continúa tú

11 · Un cuadrado en el denominador

$$\int \frac{2x+5}{x^2+2x+5}\,dx$$

Compara el numerador con la derivada del denominador. ¿Cuánto sobra?

Pista 1

Escribe $2x+5 = (2x+2)+3$ y separa las dos fracciones.

Pista 2

Para la segunda, completa el cuadrado: $x^2+2x+5 = (x+1)^2+4$.

Pista 3

Integra el término logarítmico y normaliza el otro denominador hasta que empiece por 1.

Continúa tú

12 · Un polinomio por un logaritmo

$$\int x^3 \ln x\,dx$$

¿Qué sucede con el logaritmo si lo derivas? ¿Y con x^3 si lo integras?

Pista 1

En la fórmula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, prueba con $u = \ln x$.

Pista 2

Con $dv = x^3\,dx$, obtienes $v = x^4/4$. Calcula el producto $v\,du$.

Pista 3

Integra la potencia que queda y comprueba la cancelación al derivar el producto.

Continúa tú

Protocolos antibloqueo Ejercicios 13–16

13 · Una arcotangente sola

$$\int \arctan x \, dx$$

Puedes ver la arcotangente como un producto aunque solo aparezca una función.

Pista 1

Escribe $1 \cdot \arctan x$. ¿Cuál de los dos factores conviene derivar?

Pista 2

Con $u = \arctan x$ y $dv = dx$, obtienes $du = dx/(1+x^2)$ y $v = x$.

Pista 3

Aplica partes. En la integral que queda, compara el numerador con la derivada del denominador.

Continúa tú

14 · Un producto con una exponencial

$$\int (x^2 + 2x)e^x \, dx$$

Si derivas el polinomio, ¿qué sucede con su grado? ¿Qué ocurre al integrar e^x?

Pista 1

Prueba $u = x^2 + 2x$ y $dv = e^x \, dx$.

Pista 2

Tras la primera integración queda $\int (2x+2)e^x \, dx$. Vuelve a derivar el factor polinómico.

Pista 3

Sustituye la segunda integral en la primera. Mantén el paréntesis hasta distribuir el signo menos.

Continúa tú

15 · Una exponencial por un coseno

$$\int e^x \cos x \, dx$$

Derivar el coseno lo transforma en un seno. ¿Qué sucede si lo derivas una segunda vez?

Pista 1

Llama I a la integral. Integra e^x y deriva el factor trigonométrico en las dos aplicaciones de partes.

Pista 2

La primera aplicación da $I = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$. Conserva ese signo más.

Pista 3

Aplica partes al último sumando. Cuando reaparezca I, reúne ambos términos y despeja.

Continúa tú

16 · Un cociente con una raíz

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+4}} \, dx$$

Fíjate en $\sqrt{x+4}$. ¿Qué cambio te permitiría eliminar esa raíz?

Pista 1

Si llamas t a la raíz entera, puedes escribir también el numerador en la nueva variable.

Pista 2

De $t = \sqrt{x+4}$ se sigue que $x = t^2 - 4$ y $dx = 2t \, dt$.

Pista 3

Sustituye los tres elementos, cancela el factor común e integra. Al final, vuelve a x.

Continúa tú

Protocolos antibloqueo Ejercicios 17–20

17 · Dos radicales de distinto índice

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$$

Pista 1 Busca el menor múltiplo común de los índices 2 y 3.

Pista 2 Toma $t=\sqrt[6]{x}$. ¿Cómo se escriben las dos raíces en función de t?

Pista 3 Tienes $dx=6t^5\,dt$, $\sqrt{x}=t^3$ y $\sqrt[3]{x}=t^2$. Simplifica la fracción antes de dividir.

Continúa tú Divide t^3 entre $t+1$. Integra el cociente y la fracción restante, y deshaz el cambio.

18 · Un coseno al cuadrado

$$\int \cos^2 x\,dx$$

Pista 1 Para integrar una potencia compuesta directamente, tendría que aparecer también la derivada de la base. ¿Aparece aquí?

Pista 2 Recuerda la identidad del ángulo doble que relaciona $\cos(2x)$ con $\cos^2 x$.

Pista 3 Despeja $\cos^2 x$ en $\cos(2x)=2\cos^2 x-1$.

Continúa tú Integra por separado el término constante y el coseno de $2x$. Revisa el segundo factor $1/2$.

19 · De la segunda derivada a la función

La función f cumple $f''(x)=6x-2$. Su tangente en $x=1$ tiene pendiente 4 y su gráfica pasa por $(0,5)$. Determina f.

Pista 1 Traduce la pendiente en un dato sobre f' y el punto en un dato sobre f.

Pista 2 Integra f'' una vez. ¿Cuál de los datos permite hallar la primera constante?

Pista 3 Tienes $f'(x)=3x^2-2x+k_1$. Impón $f'(1)=4$ antes de volver a integrar.

Continúa tú Al integrar por segunda vez aparece otra constante. Usa el punto de paso y comprueba los dos datos.

20 · Una primitiva a trozos

Sea $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 1,\\ 3x^2, & x>1.\end{cases}$ Halla su primitiva F con $F(0)=5$ y justifica que es derivable en $x=1$.

Pista 1 Integra cada rama con su propia constante.

Pista 2 El punto $x=0$ pertenece a la primera rama. ¿Qué constante fija $F(0)=5$?

Pista 3 Para unir las dos expresiones, la primitiva debe ser continua en 1. Iguala el valor por la izquierda y el límite por la derecha.

Continúa tú Deriva las dos expresiones y sustituye $x=1$ en cada derivada. Compara los dos valores con $f(1)$.

3. Resoluciones detalladas

Los factores en naranja se introducen y se compensan para conservar el integrando. Puedes comprobar cada resultado derivando.

1 · Una primitiva que pasa por un punto

Dividimos cada sumando del numerador entre x y escribimos la raíz como potencia para simplificar antes de integrar.

$$f(x) = \frac{2x^3 - \sqrt{x} + 5}{x} = 2x^2 - x^{-1/2} + 5x^{-1}.$$

En los dos primeros términos sumamos uno al exponente y dividimos por el nuevo exponente. El tercero es de tipo logaritmo neperiano. Una primitiva de $1/x$ es $\ln|x|$.

$$F(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^{1/2}}{1/2} + 5\ln|x| + k = \frac{2x^3}{3} - 2\sqrt{x} + 5\ln|x| + k.$$

Imponemos el dato: $4 = F(1) = 2/3 - 2 + k$, luego $k = 16/3$.

$$\boxed{F(x) = \frac{2x^3}{3} - 2\sqrt{x} + 5\ln|x| + \frac{16}{3}.}$$

Comprobación. $F'(x) = 2x^2 - 1/\sqrt{x} + 5/x = f(x)$ y $F(1) = (2+16)/3 - 2 = 4$.

2 · Una potencia de un polinomio

Integral propuesta $\displaystyle\int x^2(5x^3-4)^4\,dx$

No hace falta desarrollar la cuarta potencia. La función interior es $f(x) = 5x^3 - 4$, con $f'(x) = 15x^2$. Introducimos el factor que falta y lo compensamos fuera.

$$I = \frac{1}{15}\int 15x^2(5x^3-4)^4\,dx = \frac{1}{15}\frac{(5x^3-4)^5}{5} + k.$$

$$\boxed{F(x) = \frac{(5x^3-4)^5}{75} + k.}$$

Comprobación. Al derivar, la cadena aporta $5(5x^3-4)^4 \cdot 15x^2$. El 75 del denominador cancela $5 \cdot 15$.

3 · Un cociente de polinomios

Integral propuesta $\displaystyle\int \frac{3x-2}{3x^2-4x+7}\,dx$

Con $q(x) = 3x^2 - 4x + 7$, la relación $q'(x) = 6x - 4 = 2(3x-2)$ da

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2(3x-2)}{3x^2-4x+7}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{q'(x)}{q(x)}\,dx.$$

Al integrar $q'(x)/q(x)$ obtenemos $\ln|q(x)|$. Conservamos el factor $1/2$.

$$\boxed{F(x) = \tfrac{1}{2}\ln|3x^2-4x+7| + k.}$$

Comprobación. $F'(x) = \dfrac{6x-4}{2(3x^2-4x+7)} = \dfrac{3x-2}{3x^2-4x+7}$.

4 · Una exponencial con seno

Integral propuesta $\displaystyle\int \cos(2x)\, e^{\operatorname{sen}(2x)}\, dx$

La derivada del exponente $f(x)=\operatorname{sen}(2x)$ es $2\cos(2x)$. Falta solo el factor 2 para reconocer $f'(x)e^{f(x)}$.

$$I=\frac{1}{2}\int 2\cos(2x)\, e^{\operatorname{sen}(2x)}\, dx \quad\Longrightarrow\quad \boxed{F(x)=\tfrac{1}{2}e^{\operatorname{sen}(2x)}+k.}$$

Comprobación. $F'(x)=\frac{1}{2}e^{\operatorname{sen}(2x)}\cdot 2\cos(2x)=\cos(2x)e^{\operatorname{sen}(2x)}$.

5 · Una suma de cuadrados

Integral propuesta $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+9}\, dx$

Al sacar 9 del denominador aparece $1/9$ fuera de la integral. La función interior es $2x/3$. Para reconocer la derivada de la arcotangente, falta $2/3$ en el numerador.

$$I=\frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+(2x/3)^2}=\frac{1}{9}\frac{3}{2}\int \frac{2/3}{1+(2x/3)^2}\, dx.$$

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{2x}{3}\right)+k.}$$

Comprobación. $F'(x)=\frac{1}{6}\cdot\dfrac{2/3}{1+4x^2/9}=\dfrac{1}{4x^2+9}$.

6 · Un coseno con argumento cúbico

Integral propuesta $\displaystyle\int x^2\cos(x^3+2)\, dx$

Buscamos la derivada de un seno. Su argumento es $f(x)=x^3+2$, cuya derivada $3x^2$ coincide con el factor exterior salvo por el 3.

$$I=\frac{1}{3}\int 3x^2\cos(x^3+2)\, dx \quad\Longrightarrow\quad \boxed{F(x)=\tfrac{1}{3}\operatorname{sen}(x^3+2)+k.}$$

Comprobación. $F'(x)=\frac{1}{3}\cos(x^3+2)\cdot 3x^2=x^2\cos(x^3+2)$.

7 · Una exponencial de base dos

Integral propuesta $\displaystyle\int x\, 2^{x^2-1}\, dx$

La derivada de $2^{f(x)}$ es $2^{f(x)}\ln 2\cdot f'(x)$. Aquí $f'(x)=2x$, así que debemos compensar tanto el 2 como el $\ln 2$.

$$I=\frac{1}{2}\int 2x\, 2^{x^2-1}\, dx=\frac{1}{2}\,\frac{2^{x^2-1}}{\ln 2}+k.$$

$$\boxed{F(x)=\frac{2^{x^2-1}}{2\ln 2}+k.}$$

Comprobación. $F'(x)=\dfrac{2^{x^2-1}\ln 2\cdot 2x}{2\ln 2}=x\,2^{x^2-1}$.

8 · Un cociente de grados tres y dos

Integral propuesta $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2-x+3}{x^2+1}\,dx$

Dividimos antes de integrar. Al restar $x(x^2+1)$ queda $2x^2-2x+3$. Restamos ahora $2(x^2+1)$ y queda $-2x+1$. Por tanto,

$$\frac{x^3+2x^2-x+3}{x^2+1} = x+2-\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}.$$

El tercer sumando aporta $-\ln|x^2+1|$, pues la derivada del denominador es $2x$. El cuarto es la derivada de $\arctan x$.

$$\boxed{F(x)=\frac{x^2}{2}+2x-\ln|x^2+1|+\arctan x+k.}$$

Comprobación. Al derivar obtenemos $x+2+(-2x+1)/(x^2+1)$. Al reducir a común denominador, el numerador es $(x+2)(x^2+1)-2x+1=x^3+2x^2-x+3$.

9 · Dos raíces en el denominador

Integral propuesta $\displaystyle\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,dx$

Factorizamos $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$. Buscamos A, B tales que

$$\frac{5x-1}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}, \qquad 5x-1=A(x+1)+B(x-2).$$

En la identidad polinómica, $x=2$ da $9=3A$, luego $A=3$. Con $x=-1$, $-6=-3B$, luego $B=2$. Integramos por separado.

$$\boxed{F(x)=3\ln|x-2|+2\ln|x+1|+k.}$$

Comprobación. $F'(x)=3/(x-2)+2/(x+1)$, cuyo numerador común es $3(x+1)+2(x-2)=5x-1$.

10 · Un factor doble

Integral propuesta $\displaystyle\int \frac{4x-1}{(x-2)^2}\,dx$

Al haber un factor doble, incluimos sus dos potencias en la descomposición:

$$\frac{4x-1}{(x-2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}, \qquad 4x-1=A(x-2)+B.$$

El coeficiente de x da $A=4$ y la sustitución $x=2$ da $B=7$. La segunda fracción es $7(x-2)^{-2}$, cuya primitiva es $-7(x-2)^{-1}$.

$$\boxed{F(x)=4\ln|x-2|-\frac{7}{x-2}+k.}$$

Comprobación. $F'(x)=4/(x-2)+7/(x-2)^2=[4(x-2)+7]/(x-2)^2$.

11 · Un cuadrado en el denominador

Integral propuesta $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2+2x+5}\,dx$

Sea $q(x)=x^2+2x+5=(x+1)^2+4$. La derivada es $2x+2$, así que el numerador contiene $q'(x)$ y sobran tres unidades:

$$I=\int \frac{2x+2}{q(x)}\,dx+3\int \frac{dx}{(x+1)^2+4}.$$

La primera integral da $\ln|q(x)|$. En la segunda sacamos el 4 del denominador y ajustamos la derivada de $(x+1)/2$:

$$\frac{3}{4}\int \frac{dx}{1+((x+1)/2)^2}=\frac{3}{4}2\int \frac{1/2}{1+((x+1)/2)^2}\,dx=\frac{3}{2}\arctan\!\left(\frac{x+1}{2}\right)+k.$$

$$\boxed{F(x)=\ln|x^2+2x+5|+\frac{3}{2}\arctan\!\left(\frac{x+1}{2}\right)+k.}$$

Comprobación. Las derivadas de los dos sumandos son $(2x+2)/q(x)$ y $3/q(x)$. Al sumarlas se recupera el numerador $2x+5$.

12 · Un polinomio por un logaritmo

Integral propuesta $\displaystyle\int x^3\ln x\,dx$

Elegimos $u=\ln x$ porque al derivarlo desaparece el logaritmo. Además, $dv=x^3\,dx$ se integra directamente. Así, $du=dx/x$ y $v=x^4/4$.

$$I=uv-\int v\,du=\frac{x^4}{4}\ln x-\int \frac{x^4}{4}\frac{dx}{x}=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{1}{4}\int x^3\,dx.$$

$$\boxed{F(x)=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{x^4}{16}+k.}$$

Comprobación. La regla del producto da $x^3\ln x+x^3/4$ en el primer término. La derivada de $-x^4/16$ cancela ese último $x^3/4$.

13 · Una arcotangente sola

Integral propuesta $\displaystyle\int \arctan x\,dx$

Elegimos $u=\arctan x$ para transformar la arcotangente en una fracción al derivarla. El otro factor es 1, de modo que $dv=dx$ y $v=x$.

$$I=x\arctan x-\int \frac{x}{1+x^2}\,dx=x\arctan x-\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx.$$

La última integral tiene la forma $q'(x)/q(x)$ con $q(x)=1+x^2$.

$$\boxed{F(x)=x\arctan x-\tfrac{1}{2}\ln|1+x^2|+k.}$$

Comprobación. $F'(x)=\arctan x+\dfrac{x}{1+x^2}-\dfrac{x}{1+x^2}=\arctan x.$

14 · Un producto con una exponencial

Integral propuesta $\displaystyle\int (x^2+2x)e^x\,dx$

Elegimos derivar x^2+2x para reducir su grado e integrar e^x, que se conserva. Con $du=(2x+2)\,dx$ y $v=e^x$, la primera aplicación de partes da

$$I=(x^2+2x)e^x-J,\qquad J=\int (2x+2)e^x\,dx.$$

En J tomamos $u=2x+2$, $du=2\,dx$ y de nuevo $v=e^x$. Una primitiva del integrando de J es $(2x+2)e^x-2e^x$. La sustituimos completa:

$$I=(x^2+2x)e^x-\big[(2x+2)e^x-2e^x\big]+k.$$

$$\boxed{F(x)=x^2e^x+k.}$$

Comprobación. La regla del producto da $F'(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x$. También explica por qué el resultado se simplifica tanto.

15 · Una exponencial por un coseno

Integral propuesta $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$

En la primera aplicación elegimos $u=\cos x$, $du=-\operatorname{sen}x\,dx$, $dv=e^x\,dx$, $v=e^x$. En la segunda, $u=\operatorname{sen}x$ y $du=\cos x\,dx$. Siguiendo una primitiva y dejando la constante para el final:

$$I=e^x\cos x+J,\qquad J=\int e^x\operatorname{sen}x\,dx=e^x\operatorname{sen}x-I.$$

Sustituimos J en la primera igualdad. Entonces $I=e^x(\cos x+\operatorname{sen}x)-I$, así que $2I=e^x(\cos x+\operatorname{sen}x)$.

$$\boxed{F(x)=\tfrac{1}{2}e^x(\cos x+\operatorname{sen}x)+k.}$$

Comprobación. Al derivar el producto aparece $\tfrac{1}{2}e^x[(\cos x+\operatorname{sen}x)+(-\operatorname{sen}x+\cos x)]=e^x\cos x$.

16 · Un cociente con una raíz

Integral propuesta $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx$

Tomamos $t=\sqrt{x+4}$. Al elevar al cuadrado y despejar obtenemos $x=t^2-4$ y $dx=2t\,dt$.

$$I=\int \frac{t^2-4}{t}\,2t\,dt=2\int (t^2-4)\,dt=\frac{2}{3}t^3-8t+k.$$

Al deshacer el cambio resulta $\tfrac{2}{3}(x+4)^{3/2}-8\sqrt{x+4}+k$. Si sacamos factor común $\sqrt{x+4}$, obtenemos

$$\boxed{F(x)=\frac{2}{3}(x-8)\sqrt{x+4}+k.}$$

Comprobación. Derivando la expresión antes de factorizar queda $\sqrt{x+4}-4/\sqrt{x+4}=x/\sqrt{x+4}$.

17 · Dos radicales de distinto índice

Integral propuesta $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$

Tomamos $t=\sqrt[6]{x}$ porque el mínimo común múltiplo de 2 y 3 es 6. Así $x=t^6$, $dx=6t^5\,dt$.

$$I=\int \frac{6t^5}{t^3+t^2}\,dt=6\int \frac{t^3}{t+1}\,dt.$$

La identidad $t^3=(t+1)(t^2-t+1)-1$ da el cociente y el resto. Integramos:

$$I=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+k.$$

Volvemos a x. Las potencias t^3, t^2 y t corresponden a tres raíces de distinto índice.

$$\boxed{F(x)=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right|+k.}$$

Comprobación. En la variable t, la derivada es $6(t^2-t+1-1/(t+1))=6t^3/(t+1)$. Multiplicando por $dt/dx=1/(6t^5)$, se obtiene $1/[t^2(t+1)]=1/(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})$.

18 · Un coseno al cuadrado

Integral propuesta $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$

El factor $-\operatorname{sen}x$ que necesitaríamos para integrar como potencia compuesta no aparece. Usamos $\cos^2 x=(1+\cos(2x))/2$, que transforma el cuadrado en una suma:

$$I=\frac{1}{2}\int 1\,dx+\frac{1}{2}\int\cos(2x)\,dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)+k.$$

$$\boxed{F(x)=\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}+k.}$$

Comprobación. $F'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)=\cos^2 x$.

19 · De la segunda derivada a la función

La pendiente da $f'(1)=4$, y el punto significa $f(0)=5$. Empezamos integrando la segunda derivada:

$$f'(x)=3x^2-2x+k_1,\qquad 4=3-2+k_1\implies k_1=3.$$

Ahora integramos $f'(x)=3x^2-2x+3$. Resulta $f(x)=x^3-x^2+3x+k_2$. El dato $f(0)=5$ fija $k_2=5$.

$$\boxed{f(x)=x^3-x^2+3x+5.}$$

Comprobación. $f''(x)=6x-2$, $f'(1)=3-2+3=4$ y $f(0)=5$.

20 · Una primitiva a trozos

Integramos cada rama. Antes de unirlas obtenemos $x^2 + x + k_1$ a la izquierda y $x^3 + k_2$ a la derecha. El dato $F(0) = 5$ fija $k_1 = 5$.

Para que F sea derivable en 1, primero tiene que ser continua. El valor de la primera rama es $1 + 1 + 5 = 7$. El límite de la segunda es $1 + k_2$, así que $k_2 = 6$.

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} x^2 + x + 5, & x \le 1, \\ x^3 + 6, & x > 1. \end{cases}}$$

Comprobación. Derivamos la expresión de cada rama y evaluamos en $x = 1$. Por la izquierda usamos la derivada de $x^2 + x + 5$ y por la derecha, la de $x^3 + 6$.

$$F'_-(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3, \qquad F'_+(1) = 3 \cdot 1^2 = 3.$$

Por tanto $F'(1) = 3 = f(1)$, y la primitiva cumple $F(0) = 5$.

EL SIGUIENTE PASO

Sigue practicando integrales

Vuelve a una integral en la que necesitaste ayuda. Tapa las pistas, escribe qué detalle te permite elegir el método y comprueba tu primitiva derivándola. En Eleva2 puedes seguir preparando Matemáticas II y la PAU con el tema explicado, vídeos ordenados, formularios, colecciones de ejercicios, pistas para empezar, soluciones y resoluciones detalladas. Tienes también planificación, directos y el Tutor Eleva2 para avanzar y revisar tus dudas con el método de Mates con Andrés.

DESCUBRE ELEVA2

Pulsa el botón o escanea el QR.