Mates con Andrés · Eleva2

Rectas y planos en el espacio
10 ejercicios de posición relativa y construcción

Edición Tutor Eleva2 · Pistas y resoluciones paso a paso

Qué es este recurso. Aprende a distinguir si una intersección es un punto, una recta o un plano. Después, construye rectas y planos a partir de condiciones de paso, paralelismo y perpendicularidad.

Cómo utilizarlo. Resuelve primero en tu cuaderno. Si te bloqueas, abre el protocolo del mismo número, lee una sola pista y vuelve a intentarlo. Puedes saltar a las pistas o a la resolución desde los enlaces bajo cada enunciado.

1. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1 · Una recta en forma implícita y un plano

Estudia la posición relativa de r y π. Para justificar tu respuesta, expresa primero la recta en paramétricas.

$$r:\begin{cases} x+z=3 \\ y-2z=1 \end{cases} \qquad \pi: 2x+3y-4z-9=0.$$

Pistas (pág. 3) · Resolución (pág. 5)

Ejercicio 2 · La intersección de dos planos

Sean $\alpha: x-y+z=2$ y $\beta: 2x+y-z=4$. Estudia su posición relativa. Si se cortan, da las ecuaciones paramétricas de la recta común e identifica un punto y un vector director.

Pistas (pág. 3) · Resolución (pág. 5)

Ejercicio 3 · Dos planos que dependen de un parámetro

Clasifica los planos según el valor de $m \in \mathbb{R}$. Distingue cuándo son secantes, paralelos distintos o coincidentes.

$$\pi: x-2y+z=3, \qquad \sigma_m: 2x-4y+(m^2+1)z=5+m.$$

Pistas (pág. 3) · Resolución (pág. 6)

Ejercicio 4 · Un plano variable frente a una recta fija

Considera la recta $r: (x,y,z)=(1,-1,2)+t(2,1,-1)$, $t\in\mathbb{R}$, y el plano $\pi_a: x+ay+z=1$. Estudia su posición relativa según $a\in\mathbb{R}$. Para $a=0$, calcula el punto de corte.

Pistas (pág. 3) · Resolución (pág. 6)

Ejercicio 5 · Tres planos y sus puntos comunes

Determina, según $m \in \mathbb{R}$, si los siguientes planos comparten un punto, una recta o ningún punto. En los casos con intersección, calcúlala.

$$\alpha : x + y + z = 2, \qquad \beta : x - y + z = 0, \qquad \gamma_m : x + (m+3)y + m^2 z = 5.$$

Pistas (pág. 3) · Resolución (pág. 7)

Ejercicio 6 · El plano que contiene una recta y pasa por un punto

Halla la ecuación general del plano que contiene a r y pasa por P.

$$P = (1,1,1), \qquad r : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}.$$

Pistas (pág. 4) · Resolución (pág. 8)

Ejercicio 7 · Un plano por dos puntos y perpendicular a otro

Halla la ecuación general del plano π que pasa por $A = (1,0,1)$ y $B = (2,2,0)$ y es perpendicular al plano $\alpha : x - y + z = 2$. Comprueba las tres condiciones.

Pistas (pág. 4) · Resolución (pág. 8)

Ejercicio 8 · Una recta que corta a otras dos

Halla la recta ℓ que pasa por el origen y corta a r y a s. Indica los dos puntos de corte.

$$r : \begin{cases} x = 2 \\ z = 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} y = 2 \\ z = 2 \end{cases}.$$

Pistas (pág. 4) · Resolución (pág. 9)

Ejercicio 9 · La perpendicular común de dos rectas que se cruzan

Comprueba que estas rectas se cruzan. Determina su perpendicular común y los puntos en los que las corta.

$$r : (x,y,z) = (t,t,0), \qquad s : (x,y,z) = (u,0,u-3), \qquad t,u \in \mathbb{R}.$$

Pistas (pág. 4) · Resolución (pág. 9)

Ejercicio 10 · Una perpendicular que debe quedar dentro de un plano

Sea $\pi : x + y + z = 4$ y sea $r : (x,y,z) = (1,-1,0) + t(1,2,1)$, $t \in \mathbb{R}$. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta s contenida en π que corta perpendicularmente a r.

Pistas (pág. 4) · Resolución (pág. 10)

2. Protocolos antibloqueo

Una pista cada vez. Reconoce el tipo de ejercicio, decide cómo representarlo y escribe el primer paso. Detente en cuanto puedas continuar por tu cuenta.

Ejercicio 1 · Una recta en forma implícita y un plano

1. Reconoce. Estudia qué puntos de la recta, definida como intersección de dos planos, satisfacen también la ecuación de π.
2. Decide. Elige una coordenada libre. Sustituye después las tres paramétricas en el plano y cuenta cuántos valores del parámetro admite la igualdad.
3. Empieza. Prueba con $z = \lambda$. Despeja primero x en $x + z = 3$ y después y en $y - 2z = 1$.

Ejercicio 2 · La intersección de dos planos

1. Reconoce. Los coeficientes de x, y, z en cada plano son las componentes de su vector normal.
2. Decide. Compara los normales. Si son independientes, los puntos que buscas cumplen las dos ecuaciones simultáneamente.
3. Empieza. Suma las ecuaciones miembro a miembro. Se eliminan y y z. Regresa a una de las ecuaciones y deja $z = \lambda$.

Ejercicio 3 · Dos planos que dependen de un parámetro

1. Reconoce. El parámetro afecta tanto al normal del segundo plano como a su término independiente.
2. Decide. Compara, en el mismo orden, las razones entre los coeficientes de x, y, z. Reserva la comparación de términos independientes para cuando los normales sean proporcionales.
3. Empieza. Las dos primeras razones valen 2. Escribe qué debe cumplir $m^2 + 1$ para mantener ese factor y estudia por separado los valores que obtengas.

Ejercicio 4 · Un plano variable frente a una recta fija

1. Reconoce. En la recta puedes leer un punto y un director. En el plano puedes leer un normal que depende de a.
2. Decide. Compara director y normal mediante el producto escalar. Cuando el resultado sea cero, la pertenencia de un punto de la recta decidirá si queda dentro o fuera.
3. Empieza. Empieza por $(2, 1, -1) \cdot (1, a, 1)$. Para el corte con $a = 0$, escribe las coordenadas de un punto de r en función de t y sustitúyelas en $x + z = 1$.

Ejercicio 5 · Tres planos y sus puntos comunes

1. Reconoce. Los puntos comunes son las soluciones de un sistema lineal de tres ecuaciones. Un punto corresponde a una solución única y una recta a una familia con un parámetro libre.
2. Decide. Forma la matriz de coeficientes A. Su determinante separa el caso de solución única de los valores para los que habrá que comparar los rangos de A y A^*.
3. Empieza. Resta la primera fila a las otras dos antes de desarrollar $|A|$. En cada valor que anule el determinante, conserva también la columna de los términos independientes.

Ejercicio 6 · El plano que contiene una recta y pasa por un punto

1. Reconoce. Un punto y dos direcciones independientes fijan un plano. La recta proporciona un punto de paso y la primera dirección.
2. Decide. Lee en la forma continua el punto P_r y el director $\overrightarrow{d}_r$. Comprueba si las tres fracciones toman el mismo valor en P.
3. Empieza. Forma $\overrightarrow{PP_r} = P_r - P$. Con este vector, $\overrightarrow{d}_r$ y el desplazamiento desde P hasta un punto genérico X, plantea el determinante de coplanaridad.

Ejercicio 7 · Un plano por dos puntos y perpendicular a otro

1. Reconoce. Las dos condiciones de paso dan una dirección del plano buscado. La condición de perpendicularidad proporciona otra.
2. Decide. Forma $\overrightarrow{AB}$ y lee el normal de α. Piensa por qué ese normal puede usarse como dirección del plano π.
3. Empieza. Escribe $\overrightarrow{AB} = B - A$. Si es independiente de $\overrightarrow{n}_\alpha$, calcula su producto vectorial para hallar el normal de π y usa el punto A.

Ejercicio 8 · Una recta que corta a otras dos

1. Reconoce. La recta que buscas pasa por tres puntos alineados: el origen, un punto de r y un punto de s.
2. Decide. Usa un parámetro distinto en cada recta para escribir esos dos puntos. Forma los vectores que van desde el origen hasta ellos.
3. Empieza. Llama $R = (2, \lambda, 1)$ y $S = (\mu, 2, 2)$. Plantea $\overrightarrow{OS} = k\overrightarrow{OR}$ y busca una coordenada que determine k sin conocer los parámetros.

Ejercicio 9 · La perpendicular común de dos rectas que se cruzan

1. Reconoce. Para decidir si las rectas se cruzan, compara sus directores y comprueba si son coplanarios con el vector que une un punto de cada recta.
2. Decide. Calcula el producto mixto usando los puntos que corresponden a $t = u = 0$. Para la perpendicular, recupera ahora un punto genérico $R(t)$ y otro $S(u)$.
3. Empieza. Forma $\overrightarrow{RS} = (u - t, -t, u - 3)$. Impón que su producto escalar con cada director valga cero. Las dos ecuaciones fijarán dónde apoya la perpendicular.

Ejercicio 10 · Una perpendicular que debe quedar dentro de un plano

1. Reconoce. El punto donde s corta a r debe pertenecer también a π.
2. Decide. Halla primero $r \cap \pi$. El director buscado debe ser perpendicular a dos vectores distintos: el normal de π y el director de r.
3. Empieza. Sustituye $x = 1 + t,\ y = -1 + 2t,\ z = t$ en el plano. Para obtener la dirección, plantea $\overrightarrow{d}_r \times \overrightarrow{n}_\pi$.

3. Resoluciones detalladas

Ejercicio 1 · Una recta en forma implícita y un plano

Resolución mediante paramétricas y sustitución en el plano

Pasa la recta a paramétricas.

Los puntos de r verifican las dos ecuaciones a la vez. De $x+z=3$ e $y-2z=1$ obtenemos $x=3-z$ e $y=1+2z$. Ponemos $z=\lambda$:

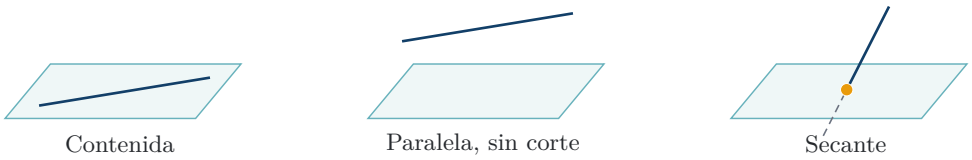
$$r:\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=1+2\lambda\,, \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Para $\lambda=0$ obtenemos $P_r=(3,1,0)$. Los coeficientes de λ dan el director $\vec{d}_r=(-1,2,1)$.

Sustituye en la ecuación de π.

$$2(3-\lambda)+3(1+2\lambda)-4\lambda-9=(6+3-9)+(-2+6-4)\lambda=0.$$

La igualdad $0=0$ se cumple para cualquier λ. Por tanto, todos los puntos de r verifican la ecuación de π.



Una identidad da la primera figura. Una contradicción corresponde a la segunda y una única solución a la tercera.

Comprueba la dirección y un punto.

Con $\vec{n}_\pi=(2,3,-4)$, el producto $\vec{d}_r\cdot\vec{n}_\pi=-2+6-4=0$ indica que la dirección de r es paralela a π. Además P_r pertenece al plano, pues $2\cdot3+3\cdot1-4\cdot0-9=0$.

Respuesta. La recta está contenida en el plano, $r\subset\pi$.

Ejercicio 2 · La intersección de dos planos

Resolución mediante normales y resolución del sistema

Los normales son $\vec{n}_\alpha=(1,-1,1)$ y $\vec{n}_\beta=(2,1,-1)$. Los cocientes entre las componentes correspondientes valen $1/2,-1,-1$. Como no hay un único factor, los planos son secantes.

Obtén todos los puntos comunes.

Sumamos $x-y+z=2$ y $2x+y-z=4$. Queda $3x=6$, luego $x=2$. En la primera ecuación, $2-y+z=2$ da $y=z$. Tomando $z=\lambda$ obtenemos

$$r:\quad x=2,\quad y=\lambda,\quad z=\lambda,\qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Verifica el punto y la dirección.

El punto $P_r=(2,0,0)$ da $2=2$ en α y $4=4$ en β. Para el director $(0,1,1)$, los productos con ambos normales valen $-1+1=0$ y $1-1=0$. También se obtiene esa dirección al calcular $\vec{n}_\alpha\times\vec{n}_\beta=(0,3,3)=3(0,1,1)$.

Respuesta. Los planos se cortan en $r:(x,y,z)=(2,0,0)+\lambda(0,1,1)$. Un punto es $P_r=(2,0,0)$ y un director es $(0,1,1)$.

Ejercicio 3 · Dos planos que dependen de un parámetro

Resolución mediante comparación de las razones entre coeficientes

Encuentra los valores críticos.

Dividimos cada coeficiente de σ_m por el correspondiente de π. En las tres componentes de los normales obtenemos

$$\frac{2}{1} = 2, \qquad \frac{-4}{-2} = 2, \qquad \frac{m^2+1}{1} = m^2+1.$$

Para que los normales sean proporcionales, el tercer cociente también ha de valer 2. Así, $m^2+1=2$ equivale a $m=\pm 1$.

Interpreta cada caso.

- Si $m \neq \pm 1$, la tercera razón difiere de las dos primeras. Los normales son independientes y los planos se cortan en una recta.
- Si $m = 1$, el término independiente de σ_1 es 6 y $6/3 = 2$. Al dividir toda su ecuación por 2, queda $x - 2y + z = 3$, que es exactamente π.
- Si $m = -1$, el término independiente es 4 y $4/3 \neq 2$. Al dividir por 2, queda $x - 2y + z = 2$. En π esa misma expresión vale 3, de modo que no hay ningún punto común.

Respuesta. Planos secantes si $m \neq \pm 1$, coincidentes si $m = 1$ y paralelos distintos si $m = -1$.

Ejercicio 4 · Un plano variable frente a una recta fija

Resolución mediante producto escalar y pertenencia

Lee los elementos geométricos.

En r, un punto es $P_r = (1, -1, 2)$ y un director es $\vec{d}_r = (2, 1, -1)$. En π_a, el normal es $\vec{n}_{\pi_a} = (1, a, 1)$. Así,

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_{\pi_a} = 2 + a - 1 = a + 1.$$

- Si $a \neq -1$, el producto es distinto de cero. La dirección de r atraviesa el plano y hay un solo punto de corte.
- Si $a = -1$, el producto vale cero. Probamos P_r en $x - y + z = 1$: $1 - (-1) + 2 = 4 \neq 1$. La dirección es paralela al plano y el punto queda fuera. La recta y el plano no se cortan.

Calcula y comprueba el corte para $a = 0$.

Sobre r se cumple $x = 1 + 2t,\ y = -1 + t,\ z = 2 - t$. El plano es $x + z = 1$, así que

$$(1 + 2t) + (2 - t) = 1 \quad \Longrightarrow \quad 3 + t = 1 \quad \Longrightarrow \quad t = -2.$$

Por ello $Q = (1 - 4, -1 - 2, 2 + 2) = (-3, -3, 4)$ está en r. También está en π_0, pues $-3 + 4 = 1$.

Respuesta. La recta es secante si $a \neq -1$ y paralela sin puntos comunes si $a = -1$. Para $a = 0$, el corte es $Q = (-3, -3, 4)$.

Ejercicio 5 · Tres planos y sus puntos comunes

Resolución mediante el teorema de Rouché–Frobenius

Busca cuándo cambia el rango.

La matriz ampliada A^* incluye los términos independientes. La matriz de coeficientes A ocupa sus tres primeras columnas. Restamos la primera fila a la segunda y a la tercera:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & m+3 & m^2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & m+2 & m^2-1 & 3 \end{array}\right).$$

Estas operaciones conservan el determinante de A. Desarrollando por la primera columna, $|A| = -2(m^2-1)$, que se anula para $m = \pm 1$. Las dos primeras filas son independientes para cualquier m.

Interpreta el sistema para cada valor de m.

Si $m \neq \pm 1$, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 3$. Hay una única solución. Restar las dos primeras ecuaciones da $y = 1$, y sumarlas da $x + z = 1$. Sustituimos $z = 1 - x$ en la tercera:

$$x + (m+3) + m^2(1-x) = 5 \implies x(1-m^2) = 2 - m - m^2.$$

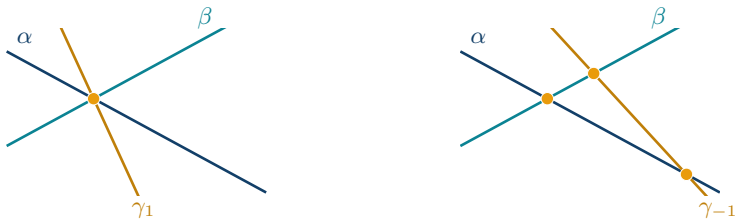
Como $m \neq \pm 1$, podemos simplificar y obtener

$$x = \frac{(m+2)(m-1)}{(m+1)(m-1)} = \frac{m+2}{m+1}, \qquad z = 1 - x = -\frac{1}{m+1}.$$

El punto cumple las dos primeras ecuaciones por $x + z = 1$, $y = 1$. En la tercera, el primer miembro vale $\frac{m+2-m^2+(m+3)(m+1)}{m+1} = \frac{5m+5}{m+1} = 5$.

Si $m = 1$, las dos últimas filas reducidas dan $-2y = -2$ y $3y = 3$. Ambas fijan $y = 1$. Los rangos son 2 y queda una variable libre. Al tomar $x = \lambda$ resulta $z = 1 - \lambda$. En el tercer plano se verifica $\lambda + 4 + (1-\lambda) = 5$ para todo λ.

Si $m = -1$, esas filas dan $-2y = -2$ e $y = 3$. Las exigencias $y = 1$ e $y = 3$ se contradicen. Así, $\operatorname{rg}(A) = 2$ y $\operatorname{rg}(A^*) = 3$. Cada par de planos se corta, pero ninguno de esos cortes pertenece a los tres a la vez.



$m = 1$ $\qquad$ $m = -1$

Corte por $z = 0$. A la izquierda, las tres trazas pasan por el mismo punto. A la derecha, sus tres cruces son distintos. La dirección $(1, 0, -1)$, común a los planos en ambos casos, completa la lectura en el espacio.

Respuesta. Para $m \neq \pm 1$, el único punto es $\left(\frac{m+2}{m+1}, 1, -\frac{1}{m+1}\right)$. Para $m = 1$, la recta común es $(\lambda, 1, 1-\lambda)$. Para $m = -1$, no hay puntos comunes.

Ejercicio 6 · El plano que contiene una recta y pasa por un punto

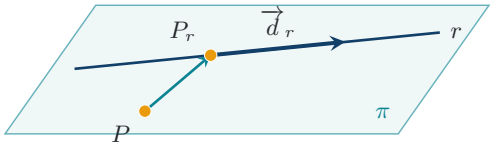
Resolución mediante dos direcciones y un determinante

Comprueba que el punto es exterior a la recta.

De la ecuación continua de r leemos $P_r = (1,2,3)$ y $\vec{d}_r = (1,2,2)$. En $P = (1,1,1)$, las tres fracciones de la recta valen respectivamente $0, -\frac{1}{2}, -1$. Al ser diferentes, $P \notin r$. La recta y el punto determinan un único plano.

Construye las dos direcciones.

La primera es $\vec{d}_r$. La segunda une P con un punto de la recta: $\overrightarrow{PP_r} = P_r - P = (0,1,2)$. Son independientes: para pasar de la primera componente de $(1,2,2)$ a la de $(0,1,2)$ haría falta multiplicar por cero, lo que anularía también las otras dos.



Los dos vectores quedan en el plano. Uno sigue la recta y el otro la conecta con P.

Para un punto genérico $X = (x,y,z)$, la coplanaridad de $\overrightarrow{PX}$ con esas direcciones exige

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (x-1)(4-2) - (y-1)(2-0) + (z-1)(1-0) = 0.$$

Respuesta. $\pi : 2x - 2y + z - 1 = 0$. Tanto P como P_r verifican la ecuación: $2-2+1-1=0$ y $2-4+3-1=0$. Además, $\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = 2 - 4 + 2 = 0$. Por tanto, toda r está en el plano.

Ejercicio 7 · Un plano por dos puntos y perpendicular a otro

Resolución mediante producto vectorial y ecuación punto-normal

Obtén las dos direcciones y calcula el normal.

El plano contiene el desplazamiento $\overrightarrow{AB} = B - A = (1,2,-1)$. Como es perpendicular a α, el normal $\vec{n}_\alpha = (1,-1,1)$ también da una dirección paralela a π. Son independientes: las razones entre sus dos primeras componentes valen 1 y -2. Su producto vectorial proporciona el normal buscado:

$$\vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2-1,\ -(1+1),\ -1-2) = (1,-2,-3).$$

Usa el punto A y comprueba las tres condiciones.

La ecuación punto-normal es $(x-1) - 2(y-0) - 3(z-1) = 0$. En A, el primer miembro de la ecuación simplificada vale $1 - 0 - 3 + 2 = 0$. En B, vale $2 - 4 - 0 + 2 = 0$. Por último,

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\alpha = (1,-2,-3) \cdot (1,-1,1) = 1 + 2 - 3 = 0.$$

Respuesta. El plano $\pi : x - 2y - 3z + 2 = 0$ pasa por A y B y es perpendicular a α.

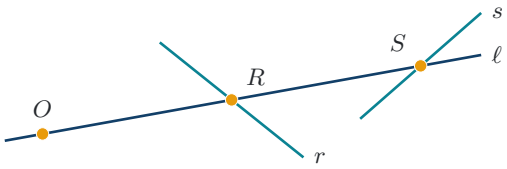
Ejercicio 8 · Una recta que corta a otras dos

Resolución mediante alineación con el origen

En r queda libre la coordenada y, y en s, la coordenada x. Escribimos $R = (2, \lambda, 1) \in r$ y $S = (\mu, 2, 2) \in s$.

Impón que O, R, S estén alineados.

Como ambos vectores parten del origen, $\overrightarrow{OS} = k\overrightarrow{OR}$ equivale a $(\mu, 2, 2) = k(2, \lambda, 1)$. La tercera coordenada fija $k = 2$. En la primera queda $\mu = 2k = 4$ y en la segunda, $2 = 2\lambda$, de donde $\lambda = 1$. Así, $R = (2, 1, 1)$ y $S = (4, 2, 2)$.



La relación $\overrightarrow{OS} = 2\overrightarrow{OR}$ coloca a R a mitad de camino entre el origen y S.

Respuesta. Tomando O y el director $\overrightarrow{OR}$, queda $\ell:\ x = 2t,\ y = t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$. Los valores $t = 0, 1, 2$ recuperan O, R, S, respectivamente. En R se cumplen $x = 2,\ z = 1$, y en S se cumplen $y = 2,\ z = 2$.

Ejercicio 9 · La perpendicular común de dos rectas que se cruzan

Resolución mediante producto mixto y puntos genéricos

Comprueba que las dos rectas se cruzan.

Sus directores $\vec{d}_r = (1, 1, 0)$ y $\vec{d}_s = (1, 0, 1)$ no son proporcionales. Tomamos $P_r = (0, 0, 0)$, $P_s = (0, 0, -3)$ y calculamos el producto mixto con $\overrightarrow{P_rP_s}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

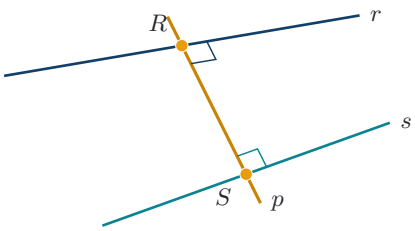
Por tanto, las dos rectas no son coplanarias y se cruzan.

Encuentra el segmento perpendicular a las dos.

Para $R = (t, t, 0) \in r$ y $S = (u, 0, u - 3) \in s$, se tiene $\overrightarrow{RS} = (u - t, -t, u - 3)$. Pedimos que sea ortogonal a los dos directores:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot \vec{d}_r = (u - t) - t = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot \vec{d}_s = (u - t) + (u - 3) = 0 \end{cases} \implies \quad u = 2t, \quad 2u - t = 3.$$

Sustituir $u = 2t$ da $4t - t = 3$, luego $t = 1$ y $u = 2$. Obtenemos $R = (1, 1, 0)$, $S = (2, 0, -1)$ y $\overrightarrow{RS} = (1, -1, -1)$.



Los extremos R y S son los puntos donde la perpendicular común corta, respectivamente, a r y a s.

Respuesta. $p:\ x = 1 + k,\ y = 1 - k,\ z = -k,\ k \in \mathbb{R}$. Para $k = 0$ pasa por R y para $k = 1$ por S. Su director da producto escalar cero con ambos directores: $1 - 1 + 0 = 0$ y $1 + 0 - 1 = 0$.

Ejercicio 10 · Una perpendicular que debe quedar dentro de un plano

Resolución mediante un punto de corte y un producto vectorial

Encuentra el único punto por el que debe pasar la recta.

El cruce de r y s debe pertenecer a π. Sustituimos las coordenadas de r en $x+y+z=4$:

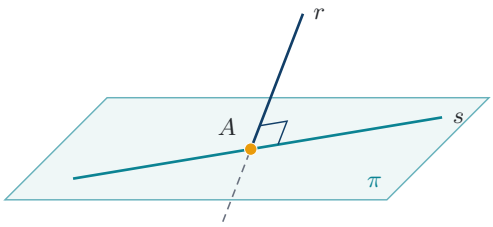
$$(1+t)+(-1+2t)+t=4 \quad\Longrightarrow\quad 4t=4 \quad\Longrightarrow\quad t=1.$$

En r se obtiene $A=(1+1,-1+2,1)=(2,1,1)$.

Construye un director que satisfaga las dos condiciones.

La recta s debe quedar dentro de π y ser perpendicular a r. Su director tiene que ser ortogonal tanto a $\overrightarrow{n}_\pi=(1,1,1)$ como a $\overrightarrow{d}_r=(1,2,1)$. Como los dos vectores no son proporcionales, su producto vectorial da una dirección no nula:

$$\overrightarrow{d}_s=\overrightarrow{d}_r\times\overrightarrow{n}_\pi=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&1\\1&1&1\end{vmatrix}=(2-1,-(1-1),1-2)=(1,0,-1).$$



La recta s discurre por π. La marca en A representa la perpendicularidad con r en el espacio.

Verifica el cruce, la contención y el ángulo recto.

El punto A se obtiene con $t=1$ en r y con $\lambda=0$ en s. Cualquier punto $A+\lambda\,\overrightarrow{d}_s$ cumple $(2+\lambda)+1+(1-\lambda)=4$, luego toda s pertenece a π. Por último, $\overrightarrow{d}_s\cdot\overrightarrow{d}_r=1+0-1=0$.

Respuesta. $s:\ x=2+\lambda,\quad y=1,\quad z=1-\lambda,\quad \lambda\in\mathbb{R}$.

EL SIGUIENTE PASO

Sigue practicando geometría

Elige un ejercicio en el que hayas necesitado una pista. Cierra el cuaderno y dibuja de nuevo la figura. ¿Qué punto o vector te permite empezar ahora? En Eleva2 puedes seguir preparando Matemáticas II y la PAU con el tema explicado, vídeos ordenados, formularios, colecciones de ejercicios, pistas para empezar, soluciones y resoluciones detalladas. Tienes también planificación, directos y el Tutor Eleva2 para avanzar y revisar tus dudas con el método de Mates con Andrés.

DESCUBRE ELEVA2

Pulsa el botón o escanea el QR.