Mates con Andrés · Eleva2

10 ejercicios de puntos, rectas y planos en el espacio

Matemáticas II y PAU · Protocolos antibloqueo y resoluciones detalladas

Qué es este recurso. Una selección de diez ejercicios para reconocer qué datos necesitas, construir rectas y planos y estudiar sus posiciones relativas.

Cómo utilizarlo. Resuelve primero en tu cuaderno. Si te bloqueas, abre el protocolo del mismo número, lee una sola pista y vuelve a intentarlo. Consulta la resolución después y comprueba qué decisión o cálculo necesitas mejorar.

1. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1 · Completar un paralelogramo

Los puntos $A = (1, -2, 3)$, $B = (4, 0, 2)$ y $C = (2, 3, 1)$ son vértices **consecutivos** de un paralelogramo $ABCD$.

a) Calcula el cuarto vértice D.

b) Halla el centro M del paralelogramo y comprueba que es el punto medio de sus dos diagonales.

Ejercicio 2 · Alineación y ecuación de una recta

Dados $A = (1, -2, 3)$, $B = (5, -2, 1)$ y $C = (7, a, b)$:

a) Calcula a y b para que los tres puntos estén alineados.

b) Escribe la recta que los contiene en forma paramétrica y en una forma continua que respete la componente nula del vector director.

Ejercicio 3 · Leer una recta dada como sistema

Considera la recta

$$r : \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + z = 1. \end{cases}$$

a) Obtén sus ecuaciones paramétricas e indica un punto y un vector director.

b) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por $P = (2, -1, 0)$ y es paralela a r.

Ejercicio 4 · El punto de corte de dos rectas

Determina si se cortan las siguientes rectas y, si es así, calcula el punto de corte:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad s : \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 5 · Rectas secantes o cruzadas según un parámetro

Estudia la posición relativa de las rectas, según $a \in \mathbb{R}$, y calcula su punto de corte cuando exista:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad s : \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 3 - \mu \\ z = a + \mu \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 6 · Cuatro puntos en un mismo plano

Sean

$$A=(1,0,-1),\quad B=(3,1,0),\quad C=(0,2,2),\quad D=(6,0,k).$$

a) Calcula k para que los cuatro puntos sean coplanarios.

b) Para ese valor, obtén la ecuación general del plano que los contiene.

Ejercicio 7 · Dos planos con parámetro

Considera los planos

$$\pi: x+2y-z=3,\qquad \sigma_a: 2x+4y+(a^2-a-2)z=a+6,\quad a\in\mathbb{R}.$$

a) Estudia su posición relativa según a.

b) Para $a=2$, calcula las ecuaciones paramétricas de su recta de intersección.

Ejercicio 8 · Un plano que contiene una recta y un punto

Halla la ecuación general del plano que pasa por $P=(1,1,1)$ y contiene a la recta

$$r:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{2}.$$

Justifica que el plano queda determinado de forma única.

Ejercicio 9 · Recta y plano: los tres casos posibles

Sean la recta y el plano

$$r:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=2-\lambda\end{cases},\quad \lambda\in\mathbb{R},\qquad \pi: ax+y+2z=b,\quad a,b\in\mathbb{R}.$$

a) Determina para qué valores de a y b la recta es secante al plano, está contenida en él o es paralela sin estar contenida.

b) Calcula el punto de corte para $a=2$ y $b=8$.

Ejercicio 10 · Construir un plano con dos condiciones

Halla la ecuación general del plano π que contiene a la recta

$$r:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=-1+2\lambda\\ z=2-\lambda\end{cases},\quad \lambda\in\mathbb{R},$$

y es perpendicular al plano $\sigma: 2x-y+z=0$. Comprueba las dos condiciones.

2. Protocolos antibloqueo

Una pista cada vez. Reconoce el tipo de ejercicio, decide cómo representarlo y escribe el primer paso. Detente en cuanto puedas continuar por tu cuenta.

Ejercicio 1 · Completar un paralelogramo

Pista 1: Reconoce. Dibuja A, B, C en el orden en que los recorres. ¿Desde qué vértice sales para llegar al que falta?
Pista 2: Decide. Busca un lado conocido que puedas trasladar a A con el mismo sentido.
Pista 3: Empieza. Calcula $\overrightarrow{BC} = C - B$. Si colocas esa flecha con origen en A, ¿qué punto queda en su extremo?
Continúa tú. Obtén el cuarto vértice y usa una diagonal para calcular el centro. Reserva la otra para comprobarlo.

Ejercicio 2 · Alineación y ecuación de una recta

Pista 1: Reconoce. Dos puntos distintos ya fijan una recta. ¿Qué dirección tendría que seguir el desplazamiento desde A hasta C?
Pista 2: Decide. Forma $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Busca un mismo factor que transforme el primero en el segundo en las tres coordenadas.
Pista 3: Empieza. La coordenada x permite hallar ese factor sin conocer a ni b. Aplícalo también a la componente nula.
Continúa tú. Comprueba la proporcionalidad. Para la forma continua, conserva como ecuación aparte la coordenada que no cambia.

Ejercicio 3 · Leer una recta dada como sistema

Pista 1: Reconoce. Cada ecuación representa un plano. Buscas los puntos que satisfacen las dos a la vez.
Pista 2: Decide. Mira qué ocurre si sumas las ecuaciones. Después elige como parámetro una coordenada que pueda variar.
Pista 3: Empieza. Llama λ a z y vuelve a una de las ecuaciones para expresar y.
Continúa tú. Lee el punto correspondiente a $\lambda = 0$ y el director en los coeficientes de λ. ¿Cuál de los dos datos se conserva al construir la paralela?

Ejercicio 4 · El punto de corte de dos rectas

Pista 1: Reconoce. Las coordenadas de un punto cualquiera de r ya dependen de un único parámetro.
Pista 2: Decide. Para pertenecer también a s, ese punto tiene que estar en los dos planos que la definen. Empieza por el que fija x.
Pista 3: Empieza. Iguala $1 + 2\lambda$ a -1. Sustituye el valor obtenido en r antes de decidir si hay corte.
Continúa tú. Lleva las tres coordenadas al segundo plano. Explica también por qué no hay otro candidato.

Ejercicio 5 · Rectas secantes o cruzadas según un parámetro

Pista 1: Reconoce. Lee los dos directores. ¿El valor de a cambia la dirección de s o la posición de su punto de paso?
Pista 2: Decide. Si los directores no son proporcionales, queda por decidir si las dos rectas están en un mismo plano.
Pista 3: Empieza. Toma P_r y P_s poniendo a cero el parámetro de cada recta. Forma el producto mixto de los dos directores y $\overrightarrow{P_rP_s}$.
Continúa tú. Clasifica los casos según se anule o no el producto mixto. Solo en el caso secante, iguala las coordenadas con parámetros distintos para hallar el corte.

Ejercicio 6 · Cuatro puntos en un mismo plano

Pista 1: Reconoce. Comprueba si A, B, C determinan un plano. Para ello necesitas dos direcciones independientes.
Pista 2: Decide. Usa A como origen común. El cuarto punto estará en ese plano cuando $\overrightarrow{AD}$ sea coplanario con $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.
Pista 3: Empieza. Escribe las tres diferencias de puntos y forma su determinante. ¿Qué fila te permite aprovechar un cero?
Continúa tú. Calcula k. Para hallar el plano sustituye el cuarto punto por un punto genérico $X = (x, y, z)$ y aplica la misma condición.

Ejercicio 7 · Dos planos con parámetro

Pista 1: Reconoce. ¿Cómo reconoces la orientación de un plano en su ecuación general? Lee sus tres coeficientes.
Pista 2: Decide. Compara los normales. Las dos primeras coordenadas ya fijan el único factor posible de proporcionalidad.
Pista 3: Empieza. Impón ese mismo factor a las componentes de z. Para cada valor especial, compara también los términos independientes.
Continúa tú. Clasifica los demás valores. Para $a = 2$, reúne las dos ecuaciones y deja una coordenada libre para describir todos los puntos de corte.

Ejercicio 8 · Un plano que contiene una recta y un punto

Pista 1: Reconoce. Dibuja r, marca en ella un punto Q y sitúa P. Un plano requiere un punto y dos direcciones independientes.
Pista 2: Decide. La recta proporciona una dirección. Para obtener otra, busca dos puntos del plano que ya conozcas.
Pista 3: Empieza. Lee Q en la ecuación continua y forma $\overrightarrow{PQ} = Q - P$. ¿Es proporcional al director de r?
Continúa tú. Usa esas dos direcciones y el punto P para escribir el plano. Explica qué te garantiza la independencia y comprueba la recta entera.

Ejercicio 9 · Recta y plano: los tres casos posibles

Pista 1: Reconoce. De r puedes leer un punto y un director. De π, un normal. ¿Qué dos vectores conviene comparar?
Pista 2: Decide. Calcula su producto escalar. Cuando sea cero, la dirección de r es paralela al plano y necesitarás comprobar uno de sus puntos.
Pista 3: Empieza. Toma el punto de r que corresponde a $\lambda = 0$ y sustitúyelo en π para el valor especial de a.
Continúa tú. Distingue los tres casos. Para los valores concretos del apartado b), sustituye un punto genérico de r en el plano y recupera las coordenadas del corte.

Ejercicio 10 · Construir un plano con dos condiciones

Pista 1: Reconoce. Dibuja el plano que buscas, la recta que contiene y el otro plano perpendicular. Busca un punto y dos direcciones del plano desconocido.
Pista 2: Decide. La recta aporta un punto y una dirección. En el dibujo, traza una flecha normal a σ. ¿Qué relación tiene esa dirección con π?
Pista 3: Empieza. Lee el director de r y el normal de σ. Comprueba si son proporcionales antes de usarlos como dos direcciones de π.
Continúa tú. Construye el plano con un punto de r. Comprueba que contiene todos sus puntos y que los normales de los dos planos son ortogonales.

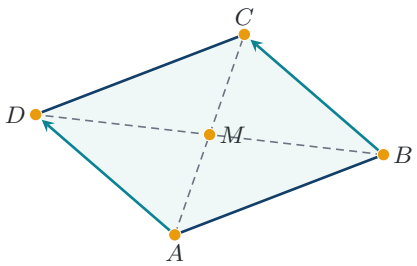
3. Resoluciones detalladas

Ejercicio 1 · Completar un paralelogramo

Resolución mediante traslación de un lado y punto medio

1. Dibuja los vértices en el orden dado.

Recorre A, B, C, D. Para ir de A al vértice que falta hay que hacer el mismo desplazamiento que al ir de B a C. Por eso escribimos $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Fíjate en el sentido de las dos flechas.



Los vectores $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$ tienen la misma dirección, el mismo sentido y la misma longitud. Las diagonales pasan por M.

2. Traslada el vector conocido.

Calculamos extremo menos origen y colocamos el vector con origen en A:

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (2-4,\ 3-0,\ 1-2) = (-2, 3, -1), \qquad D = A + \overrightarrow{BC} = \boxed{(-1, 1, 2)}.$$

Como comprobación, $\overrightarrow{DC} = C - D = (3, 2, -1)$ coincide con $\overrightarrow{AB} = B - A$. También se cumple la condición del otro par de lados.

3. Comprueba el centro por las dos diagonales.

Las diagonales son AC y BD. Hallamos sus puntos medios por separado:

$$M_{AC} = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{-2+3}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right), \qquad M_{BD} = \left(\frac{4-1}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{2+2}{2}\right).$$

Las dos diagonales tienen el mismo punto medio. El centro es $\boxed{M = (3/2, 1/2, 2)}$.

Error que debes vigilar. Si utilizas $\overrightarrow{CB}$ al salir de A, recorres el lado en sentido contrario y obtienes otro vértice.

Respuesta. a) El cuarto vértice es $D = (-1, 1, 2)$. **b)** Las dos diagonales tienen el mismo punto medio, $M = (3/2, 1/2, 2)$.

Ejercicio 2 · Alineación y ecuación de una recta

Resolución mediante proporcionalidad sin dividir por componentes nulas

1. Decide qué vectores deben ser proporcionales.

A y B son distintos. Para que C esté en su recta, el vector que va de A a C debe tener la dirección de $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 0, -2), \qquad \overrightarrow{AC} = C - A = (6, a+2, b-3).$$

Hay una componente nula. Es más cómodo escribir $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$ que comparar cocientes.

2. Usa el mismo factor en las tres coordenadas.

La primera coordenada da $6 = 4t$, luego $t = 3/2$. Con ese valor,

$$a + 2 = \tfrac{3}{2} \cdot 0 = 0, \qquad b - 3 = \tfrac{3}{2}(-2) = -3 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a = -2, \quad b = 0}.$$

En efecto, $(6, 0, -3) = \frac{3}{2}(4, 0, -2)$. El desplazamiento hasta C tiene el mismo sentido que el desplazamiento hasta B y es una vez y media más largo.

3. Construye la recta y lee la coordenada fija.

Tenemos un punto de paso, A, y podemos simplificar el director a $(2, 0, -1)$. La forma vectorial $(x, y, z) = (1, -2, 3) + \lambda(2, 0, -1)$ da

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 \\ z = 3 - \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Despejamos λ solo en las ecuaciones de x y z. La segunda ya indica que todos los puntos tienen la misma coordenada y:

$$\boxed{y = -2, \qquad \frac{x-1}{2} = \frac{z-3}{-1}}.$$

Con $\lambda = 0, 2, 3$ se recuperan A, B, C, respectivamente.

Error que debes vigilar. El cero del director significa que y permanece fija. Escribir $(y+2)/0$ introduciría una división indefinida.

Respuesta. a) $a = -2$ y $b = 0$.
b) En paramétricas, $x = 1 + 2\lambda,\ y = -2,\ z = 3 - \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. En continua, $\frac{x-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$, con $y = -2$.

Ejercicio 3 · Leer una recta dada como sistema

Resolución mediante resolución de los dos planos con un parámetro libre

1. Busca todos los puntos de la intersección.

Cada ecuación representa un plano. Sus normales, $(1,1,-1)$ y $(2,-1,1)$, no son proporcionales. La intersección es una recta. Sus puntos satisfacen simultáneamente

$$x+y-z=2, \qquad 2x-y+z=1.$$

Al sumar desaparecen y y z y queda $3x=3$. Así que $x=1$ en toda la recta. La primera ecuación queda $1+y-z=2$, es decir, $y=1+z$.

2. Elige la coordenada que sí puede variar.

Elegimos $z=\lambda$. Entonces

$$\boxed{r:\begin{cases}x=1\\y=1+\lambda\\z=\lambda\end{cases}}, \qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Con $\lambda=0$ leemos $P_r=(1,1,0)$. Los coeficientes de λ dan $\vec{d}_r=(0,1,1)$. Se comprueban las dos igualdades para cualquier λ: $1+(1+\lambda)-\lambda=2$ y $2-(1+\lambda)+\lambda=1$.

3. Conserva la dirección y cambia el punto de paso.

Por $P=(2,-1,0)$ pasa una única recta con ese director:

$$s:(x,y,z)=(2,-1,0)+\mu(0,1,1) \iff \boxed{s:\begin{cases}x=2\\y=-1+\mu\\z=\mu\end{cases}}, \quad \mu\in\mathbb{R}.$$

Con $\mu=0$ obtenemos P. Las dos rectas son distintas porque todos los puntos de r tienen $x=1$ y todos los de s tienen $x=2$. Al compartir dirección, son paralelas.

Error que debes vigilar. En este sistema x está fijada. La variable libre debe elegirse entre las coordenadas que realmente pueden variar.

Respuesta. a) $r:\ x=1,\ y=1+\lambda,\ z=\lambda$, con $\lambda\in\mathbb{R}$. Un punto es $(1,1,0)$ y un director es $(0,1,1)$.
b) $s:\ x=2,\ y=-1+\mu,\ z=\mu$, con $\mu\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 4 · El punto de corte de dos rectas

Resolución mediante pertenencia a los dos planos de la segunda recta

1. Aprovecha la forma en que está dada cada recta.

Un punto cualquiera de r es $R(\lambda)=(1+2\lambda,\lambda,2-\lambda)$. La recta s está dada como intersección de dos planos. Podemos utilizar sus condiciones directamente.

2. Encuentra el único candidato en el primer plano.

Todo punto de s tiene $x=-1$. Sobre r, esa condición exige

$$1+2\lambda=-1 \implies 2\lambda=-2 \implies \lambda=-1.$$

El punto de r asociado es

$$R(-1)=\big(1+2(-1),\,-1,\,2-(-1)\big)=(-1,-1,3).$$

Hasta aquí sabemos que está en r y en el plano $x=-1$.

3. Decide si hay corte.

Falta comprobar el segundo plano de s. En $x + 2y + z = 0$ sustituimos las tres coordenadas del candidato:

$$-1 + 2(-1) + 3 = 0.$$

Cumple las dos ecuaciones de s. Como la primera solo admitía un valor de λ, el punto común es único.

Error que debes vigilar. Si la comprobación del segundo plano hubiera fallado, no habría quedado ningún otro candidato en r.

Respuesta. Las rectas son secantes y se cortan en $(-1, -1, 3)$.

Ejercicio 5 · Rectas secantes o cruzadas según un parámetro

Resolución mediante direcciones, producto mixto y punto de corte

1. Lee qué cambia cuando varía a.

Al poner a cero los parámetros obtenemos los puntos de paso. En los coeficientes de cada parámetro leemos los directores:

$$P_r = (1, 0, 1), \quad \vec{d}_r = (1, 2, -1), \qquad P_s = (0, 3, a), \quad \vec{d}_s = (2, -1, 1).$$

Los directores son independientes: para duplicar la primera componente de $\vec{d}_r$ habría que duplicar también la segunda, y $2 \cdot 2 \neq -1$. Para cualquier a, quedan dos posibilidades: rectas secantes o rectas que se cruzan en el espacio.

2. Comprueba si caben en un mismo plano.

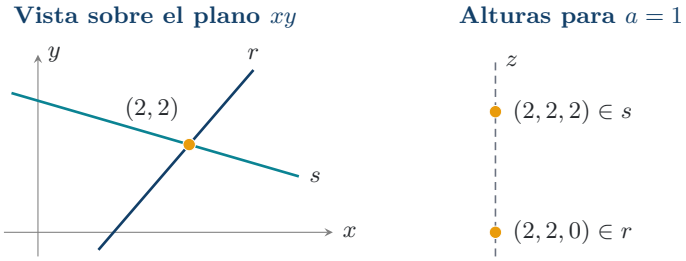
A los dos directores les añadimos un vector que vaya de una recta a la otra, $\overrightarrow{P_r P_s} = (-1, 3, a - 1)$. Las rectas son coplanarias cuando el producto mixto de estos tres vectores es cero. Desarrollamos por la tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & a-1 \end{vmatrix} = (-1)(2-1) - 3(1+2) + (a-1)(-1-4) = -5(a+1).$$

Si $\boxed{a = -1}$, son coplanarias y, al tener distintas direcciones, se cortan. Para $\boxed{a \neq -1}$ no son coplanarias: son rectas cruzadas.

3. Calcula el punto solo en el caso secante.

Igualamos las coordenadas con λ en r y μ en s. Las dos primeras exigen $1 + \lambda = 2\mu$ y $2\lambda = 3 - \mu$. De la segunda, $\mu = 3 - 2\lambda$. La primera queda $1 + \lambda = 6 - 4\lambda$, luego $\lambda = \mu = 1$. En la tercera coordenada se cumple $1 - 1 = -1 + 1 = 0$. Ambas rectas dan el punto $\boxed{(2, 2, 0)}$.



La proyección sobre xy es la misma para todo a. En el cruce aparente, las alturas son 0 en r y $a + 1$ en s. Solo coinciden cuando $a = -1$.

Error que debes vigilar. Un cruce en el dibujo no demuestra que las rectas compartan un punto del espacio. Hay que comprobar también la tercera coordenada.

Respuesta. Si $a = -1$, las rectas son secantes en $(2, 2, 0)$. Si $a \neq -1$, se cruzan en el espacio y no tienen ningún punto común.

Ejercicio 6 · Cuatro puntos en un mismo plano

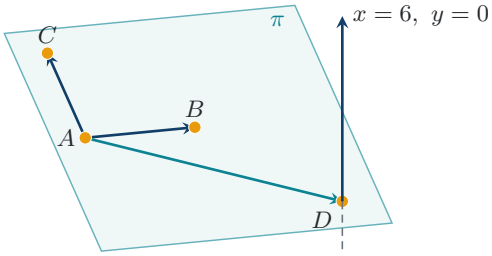
Resolución mediante coplanaridad de tres vectores con origen común

1. Identifica el plano que ya está fijado.

Los puntos A, B, C son conocidos. Desde A salen los vectores

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 1, 1), \qquad \overrightarrow{AC} = C - A = (-1, 2, 3).$$

No son proporcionales, por lo que determinan con A un único plano. Cuando varía k, $D = (6, 0, k)$ se mueve en una recta de dirección $(0, 0, 1)$. Buscamos la altura a la que esa recta corta el plano.



D está sobre la recta de coordenadas fijas $x = 6,\ y = 0$. La figura muestra la posición en la que pertenece al plano de A, B, C.

2. Impón la condición al cuarto punto.

El vector $\overrightarrow{AD} = (5, 0, k + 1)$ debe ser coplanario con $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Desarrollamos el determinante por la última fila, que tiene un cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & k+1 \end{vmatrix} = 5(1 \cdot 3 - 1 \cdot 2) + (k+1)(2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)) = 5 + 5(k+1).$$

Igualando a cero obtenemos $5k + 10 = 0$ y $\boxed{k = -2}$.

3. Usa la misma condición para un punto cualquiera del plano.

Sustituimos la última fila por $\overrightarrow{AX} = (x - 1, y, z + 1)$. Los cofactores de esa fila son $1, -7, 5$, pues el central es $-[2 \cdot 3 - 1 \cdot (-1)] = -7$. Resulta

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ x-1 & y & z+1 \end{vmatrix} = 0 \iff (x - 1) - 7y + 5(z + 1) = 0.$$

El plano común es $\boxed{\pi : x - 7y + 5z + 4 = 0}$. Para A, B, C, D, el miembro izquierdo vale, respectivamente,

$$1 - 5 + 4 = 0, \quad 3 - 7 + 4 = 0, \quad -14 + 10 + 4 = 0, \quad 6 - 10 + 4 = 0.$$

Error que debes vigilar. En la condición de coplanaridad intervienen desplazamientos desde un mismo punto. La fila del cuarto punto es $(5, 0, k + 1)$, no sus coordenadas como punto.

Respuesta. a) $k = -2$. **b)** El plano es $\pi : x - 7y + 5z + 4 = 0$.

Ejercicio 7 · Dos planos con parámetro

Resolución mediante comparación de normales y resolución de la intersección

1. Busca cuándo pueden tener la misma orientación.

De las ecuaciones leemos

$$\vec{n}_\pi = (1, 2, -1), \qquad \vec{n}_\sigma = (2, 4, a^2 - a - 2).$$

Si son proporcionales, el factor solo puede ser 2. Para la tercera componente esto exige

$$a^2 - a - 2 = 2(-1) \iff a(a-1) = 0.$$

Los valores que hay que separar son 0 y 1. Para todos los demás, los normales son independientes y los planos se cortan en una recta.

2. Distingue coincidencia y paralelismo.

El doble de la ecuación de π es $2x + 4y - 2z = 6$. Comparamos con σ_a:

a	Ecuación de σ_a	Posición relativa
0	$2x + 4y - 2z = 6$	Coincidentes
1	$2x + 4y - 2z = 7$	Paralelos distintos
$a \notin \{0, 1\}$	$\vec{n}_\sigma$ no es proporcional a $\vec{n}_\pi$	Secantes

En el segundo caso un mismo miembro izquierdo tendría que valer 6 y 7 a la vez. Así se ve por qué no pueden tener puntos comunes.

3. Obtén la recta para $a = 2$.

En σ_2 el coeficiente de z es $4 - 2 - 2 = 0$. Nos queda

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y = 8. \end{cases}$$

La segunda ecuación da $x + 2y = 4$. Sustituyendo en la primera, $4 - z = 3$, luego $z = 1$. Si $y = \lambda$, entonces

$$\boxed{(x, y, z) = (4, 0, 1) + \lambda(-2, 1, 0)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Para cualquier λ, $(4 - 2\lambda) + 2\lambda - 1 = 3$ y $2(4 - 2\lambda) + 4\lambda = 8$. La recta está contenida en ambos planos y recoge todas las soluciones del sistema.

Error que debes vigilar. La proporcionalidad de los normales deja dos casos abiertos. El término independiente permite distinguirlos.

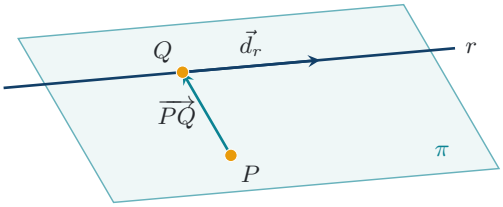
Respuesta. a) Los planos coinciden si $a = 0$, son paralelos distintos si $a = 1$ y son secantes para los demás valores de a.
b) Para $a = 2$, la recta de intersección es $x = 4 - 2\lambda,\ y = \lambda,\ z = 1$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 8 · Un plano que contiene una recta y un punto

Resolución mediante un punto de paso y dos direcciones independientes

1. Busca en el dibujo los elementos del plano.

La ecuación continua de r nos da un punto de paso $Q = (1, 2, 3)$ y un director $\vec{d}_r = (1, 2, 2)$. Ya tenemos una dirección del plano. ¿De dónde sale la segunda? P y Q pertenecen al plano que buscamos, por lo que el vector que los une también es paralelo a él.



La flecha de P a Q aporta la dirección que falta. La otra se lee directamente de r.

2. Explica por qué hay un solo plano.

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0, 1, 2).$$

Este vector no es proporcional a $(1, 2, 2)$: por la primera componente el factor tendría que ser cero, y entonces las otras dos también serían nulas. Así, P es exterior a r. Las dos direcciones independientes y el punto $P = (1, 1, 1)$ fijan el plano de forma única.

3. Construye la ecuación y comprueba las condiciones.

Para que $X = (x, y, z)$ pertenezca al plano, $\overrightarrow{PX}$, $\vec{d}_r$ y $\overrightarrow{PQ}$ deben ser coplanarios:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (x-1)(4-2) - (y-1)(2-0) + (z-1)(1-0) = 0.$$

Al simplificar, $\boxed{\pi : 2x - 2y + z - 1 = 0}$. El punto P cumple $2 - 2 + 1 - 1 = 0$. Un punto cualquiera de r tiene la forma $(1 + \lambda, 2 + 2\lambda, 3 + 2\lambda)$, y

$$2(1 + \lambda) - 2(2 + 2\lambda) + (3 + 2\lambda) - 1 = 0$$

para todo λ. Esto comprueba que la recta entera está en el plano.

Error que debes vigilar. Si P perteneciese a la recta, unirlo con Q no aportaría una segunda dirección independiente. En ese caso habría infinitos planos posibles.

Respuesta. El plano es $\pi : 2x - 2y + z - 1 = 0$. Es único porque P es exterior a r.

Ejercicio 9 · Recta y plano: los tres casos posibles

Resolución mediante producto escalar, pertenencia y punto genérico

1. Compara la dirección de la recta con el normal del plano.

Al tomar $\lambda = 0$ leemos $P_r = (1, 0, 2)$. Los vectores que deciden la orientación son

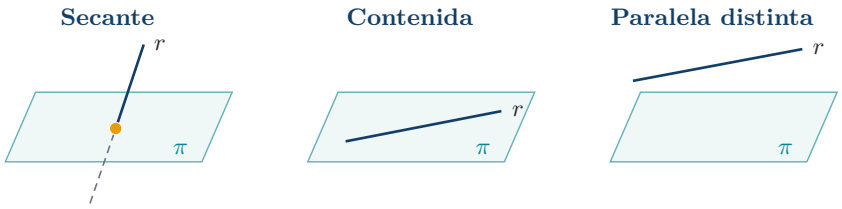
$$\vec{d}_r = (1, 1, -1), \qquad \vec{n}_\pi = (a, 1, 2), \qquad \vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = a + 1 - 2 = a - 1.$$

Si $a \neq 1$, la dirección de r tiene una componente en la dirección normal. Por tanto, r es **secante** para cualquier b. Si $a = 1$, la dirección de r es paralela al plano. Hace falta una segunda comprobación.

2. Comprueba un punto solo en el caso de dirección paralela.

Para $a = 1$, la ecuación del plano es $x + y + 2z = b$. En P_r el miembro izquierdo vale $1 + 0 + 2 \cdot 2 = 5$.

- Si $b = 5$, el plano contiene un punto de r y su dirección es paralela al plano. Luego **toda la recta está contenida**.
- Si $b \neq 5$, P_r está fuera y la dirección sigue siendo paralela. La recta y el plano son **paralelos sin puntos comunes**.



Un punto común | Todos los puntos de r | Ningún punto común

La orientación decide si hay un corte único. Cuando la dirección es paralela al plano, la posición de un punto decide entre los otros dos casos.

3. Obtén el corte para $a = 2,\ b = 8$.

En el plano $2x + y + 2z = 8$ sustituimos el punto genérico de r:

$$2(1+\lambda) + \lambda + 2(2-\lambda) = 8 \implies 6 + \lambda = 8 \implies \lambda = 2.$$

De la recta obtenemos $\boxed{(x, y, z) = (3, 2, 0)}$. En el plano se cumple $2 \cdot 3 + 2 + 2 \cdot 0 = 8$.

Error que debes vigilar. Cuando el producto escalar vale cero, aún falta averiguar si la recta está dentro o fuera del plano.

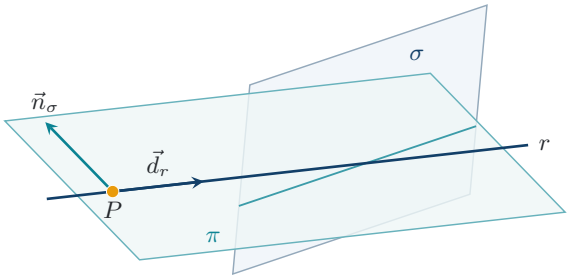
Respuesta. a) Si $a \neq 1$, la recta es secante para cualquier b. Si $a = 1$, está contenida en el plano cuando $b = 5$ y es paralela sin puntos comunes cuando $b \neq 5$.
b) Para $a = 2$ y $b = 8$, el punto de corte es $(3, 2, 0)$.

Ejercicio 10 · Construir un plano con dos condiciones

Resolución mediante un punto y dos direcciones obtenidas del dibujo

1. Traduce cada condición en un dato del plano.

Como π contiene a r, podemos tomar $P = (1, -1, 2)$ como punto de paso y $\vec{d}_r = (1, 2, -1)$ como primera dirección. Falta otra. Puesto que π es perpendicular a σ, el normal de σ es **paralelo a** π. Esa es la dirección que necesitamos.



Las flechas parten de P para comparar sus direcciones. La azul sigue r. La turquesa, normal a σ, discurre en π.

2. Construye el plano por coplanaridad.

De $2x - y + z = 0$ leemos $\vec{n}_\sigma = (2, -1, 1)$. No es proporcional a $(1, 2, -1)$, por lo que ambos vectores determinan con P un único plano. Con $\overrightarrow{PX} = (x-1, y+1, z-2)$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)(2-1) - (y+1)(1+2) + (z-2)(-1-4) = 0.$$

Así, $(x-1) - 3(y+1) - 5(z-2) = 0$, y finalmente

$$\boxed{\pi : x - 3y - 5z + 6 = 0}.$$

3. Verifica las dos condiciones por separado.

Un punto cualquiera de r cumple

$$(1+\lambda) - 3(-1+2\lambda) - 5(2-\lambda) + 6 = 0$$

para todo λ. Queda comprobada la contención. Para la perpendicularidad, leemos el normal del plano obtenido, $\vec{n}_\pi = (1, -3, -5)$, y calculamos

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\sigma = 1 \cdot 2 + (-3)(-1) + (-5) \cdot 1 = 2 + 3 - 5 = 0.$$

Los normales son ortogonales y los planos son perpendiculares.

Error que debes vigilar. El vector $(2, -1, 1)$ es normal a σ y proporciona una dirección paralela a π. Confundir el papel que desempeña en cada plano cambia la construcción.

Respuesta. El plano $\pi : x - 3y - 5z + 6 = 0$ contiene a r y es perpendicular a σ.

EL SIGUIENTE PASO

Trabaja con una ruta completa

En estos ejercicios has aprendido a buscar puntos y vectores, traducir condiciones geométricas y comprobar tus resultados.
En Eleva2 puedes seguir preparando Matemáticas II y la PAU con el tema explicado, vídeos ordenados, formularios, colecciones de ejercicios, pistas para empezar, soluciones y resoluciones detalladas. Tienes también planificación, directos y el Tutor Eleva2 para avanzar y revisar tus dudas con el método de Mates con Andrés.

DESCUBRE ELEVA2

Pulsa el botón o escanea el QR.