Mates con Andrés · Eleva2

Las propiedades de los determinantes explicadas paso a paso

Qué es este recurso.
Una guía para comprender las doce propiedades de los determinantes mediante ejemplos y explicaciones paso a paso. Partiremos de las fórmulas de orden 2 y 3 y practicarás con cinco ejercicios, sus pistas graduadas y sus resoluciones completas.

Cómo utilizarlo. Estudia las explicaciones, intenta los cinco ejercicios en tu cuaderno y consulta las pistas de una en una si te bloqueas. Lee las resoluciones después de haberlo intentado.

1. Determinantes de orden 2 y 3

El determinante asigna un **número** a una matriz **cuadrada**. No confundas la matriz A con su determinante $|A|$: las barras indican aquí un determinante, no un valor absoluto.

Orden 2. Producto de la diagonal principal menos producto de la diagonal secundaria:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Orden 3: regla de Sarrus. Se suman tres productos y se restan otros tres:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Al repetir a la derecha las dos primeras columnas, los tres productos descendentes se suman y los tres ascendentes se restan. **Sarrus solo sirve para orden 3.**

La observación que conecta con las propiedades. Cada producto toma exactamente un elemento de cada fila y uno de cada columna. En orden 2 aparecen los dos productos posibles; en orden 3, los seis. La mitad se suman y la otra mitad se restan.

Los signos de la fórmula indican qué productos sumar o restar; el valor de cada producto depende también de sus factores. Si un producto que se resta es negativo, restarlo aporta una cantidad positiva.

2. Las doce propiedades

Las propiedades siguientes valen para matrices cuadradas de cualquier orden. Las explicaremos mediante ejemplos y razonamientos que conectan unas propiedades con otras. Una comprobación numérica ayuda a entender una regla, pero no demuestra por sí sola que sea cierta en todos los casos.

Llamamos F_i a la fila i y C_j a la columna j. «Dos líneas paralelas» significa **dos filas o dos columnas**. No significa una fila y una columna.

Propiedad 1 El determinante de la traspuesta

Enunciado. El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta:

$$|A^t| = |A|.$$

Trasponer consiste en convertir las filas en columnas. Observa el ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = 1 \cdot 4 - (-3) \cdot 2 = 10,$$
$$|A^t| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 10.$$

Por qué se entiende en orden 2. Los elementos de la diagonal principal no cambian. En la secundaria aparecen los mismos factores, aunque intercambiados; su producto tampoco cambia. Así obtenemos el mismo número.

Propiedad 2 Una fila o columna de ceros

Enunciado. Si una matriz tiene una fila o columna completamente nula, su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-4) \cdot 5 + 1 \cdot (-2) \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 5 - (-4) \cdot (-2) \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 3 = 0.$$

Justificación. Como cada producto contiene un elemento de cada columna, todos contienen un cero de la primera columna. Todos los términos se anulan. El mismo razonamiento sirve para una fila nula.

Para qué sirve. Si reconoces una línea nula, puedes concluir directamente que el determinante es cero.

Propiedad 3 Intercambiar dos filas o dos columnas

Enunciado. Si se intercambian dos filas o dos columnas, el determinante **cambia de signo**. Aquí intercambiamos F_2 y F_3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) \cdot 5 + 1 \cdot (-2) \cdot 5 - 5 \cdot 2 \cdot 5 - (-4) \cdot (-2) \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 6 - 80 - 10 - 50 - 8 - 12 = -154.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) \cdot (-2) + 5 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 4 - 4 \cdot (-4) \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 5 \cdot 1 \cdot (-2) = 8 + 50 + 12 + 80 - 6 + 10 = 154.$$

Qué ocurre. Aparecen los mismos productos: los que antes se sumaban ahora se restan y viceversa. La expresión completa es la opuesta de la anterior.

Error que debes vigilar: confundir trasponer con intercambiar dos filas. La traspuesta conserva el determinante; cada intercambio de dos filas o dos columnas cambia su signo.

Propiedad 4 Dos filas o dos columnas iguales

Enunciado. Si una matriz tiene dos filas o dos columnas iguales, su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot 2 + 5\cdot 1\cdot 4 + 2\cdot 7\cdot 1 - 1\cdot 5\cdot 4 - 1\cdot 7\cdot 2 - 5\cdot 2\cdot 2 = 20 + 20 + 14 - 20 - 14 - 20 = 0.$$

Los términos se cancelan por parejas. Podemos justificarlo de forma general usando la propiedad 3: intercambiar las dos columnas iguales deja la matriz igual, pero debería cambiar el signo de su determinante. Si llamamos d a su valor,

$$d = -d \quad \Longrightarrow \quad 2d = 0 \quad \Longrightarrow \quad d = 0.$$

La misma idea sirve para filas iguales. Detectarlas permite concluir sin desarrollar el determinante.

Propiedad 5 Multiplicar una fila o columna por un número

Enunciado. Si todos los elementos de **una sola** fila o columna se multiplican por k, el determinante se multiplica por k.

En este ejemplo, k multiplica todos los elementos de la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3k \\ 2 & 6 & 5k \\ 1 & 3 & 2k \end{vmatrix} = 4\cdot 6\cdot 2k + 2\cdot 3\cdot 3k + 2\cdot 5k\cdot 1 - 1\cdot 6\cdot 3k - 3\cdot 5k\cdot 4 - 2\cdot 2\cdot 2k = k(4\cdot 6\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 5\cdot 1 - 1\cdot 6\cdot 3 - 3\cdot 5\cdot 4 - 2\cdot 2\cdot 2) = k\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Justificación. Cada producto contiene exactamente un elemento de esa columna. Por eso k aparece una vez en cada término y se puede sacar como factor común.

Para qué sirve. Puedes extraer un factor común de una fila o columna completa. La propiedad también vale para $k = 0$.

Error que debes vigilar: extraer un factor que solo afecta a algunos elementos de una línea. El factor debe ser común a todos los elementos de esa fila o columna.

Propiedad 6 Dos filas o dos columnas proporcionales

Enunciado. Si una matriz tiene dos filas o dos columnas proporcionales, su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 3 & -12 & 15 \\ 0 & 2 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot(-4) & 3\cdot 5 \\ 0 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 0.$$

Justificación. La segunda fila es el triple de la primera. Por la propiedad 5 extraemos el factor 3 de F_2. Quedan dos filas iguales; por la propiedad 4, el determinante restante es cero. Así, el original vale $3 \cdot 0 = 0$.

Si el factor de proporcionalidad fuese cero, tendríamos una fila nula y podríamos aplicar directamente la propiedad 2.

Propiedad 7 Multiplicar toda la matriz por un número

Enunciado. Si A es cuadrada de orden n, entonces

$$\boxed{|kA| = k^n|A|}.$$

Al multiplicar A por k, este multiplica **todos** sus elementos. En orden 3, extraemos un factor de cada fila:

$$\begin{aligned}\left|k\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 5 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 6\end{pmatrix}\right| &= \begin{vmatrix}k & 2k & -2k\\ 5k & k & 3k\\ 2k & -k & 6k\end{vmatrix}\\ &= k\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 5k & k & 3k\\ 2k & -k & 6k\end{vmatrix}\\ &= k\cdot k\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 5 & 1 & 3\\ 2k & -k & 6k\end{vmatrix}\\ &= k\cdot k\cdot k\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 5 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 6\end{vmatrix} = k^3|A|.\end{aligned}$$

Justificación general. Una matriz de orden n tiene n filas. Extraer un factor k de cada una aporta n factores: k^n. No necesitamos dividir por k, así que la igualdad también vale si $k = 0$.

> **La diferencia que debes controlar.** Multiplicar una línea por k aporta un factor k. Multiplicar toda la matriz por k aporta k^n. El exponente es el **orden de la matriz**.

Propiedad 8 Desdoblar por una suma en una línea

Enunciado. Si una fila o columna es suma de dos, el determinante se puede desdoblar en la suma de dos determinantes, manteniendo fijas las demás líneas. Por la segunda columna:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32}+a'_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_{11} & a'_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a'_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a'_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

Justificación. Cada producto toma un único elemento de la segunda columna. Aplicar la distributiva a ese factor produce dos términos: uno con el elemento sin prima y otro con el elemento con prima. Al agruparlos obtenemos los dos determinantes.

Por ejemplo, un producto de Sarrus se desdobla así:

$$a_{11}(a_{22}+a'_{22})a_{33} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a'_{22}a_{33}.$$

Lo mismo ocurre con todos los productos y se conserva el signo que les corresponde en la fórmula.

Un ejemplo numérico. La segunda columna cumple

$$\begin{pmatrix}2\\7\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 7 & 4\\ 5 & 8 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 5 & 4\\ 5 & 2 & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 4\\ 5 & 6 & 0\end{vmatrix}.$$

La primera y la tercera columna permanecen iguales en ambos determinantes. Como comprobación numérica, sus valores son $27 = 33 + (-6)$.

La misma propiedad permite desdoblar una resta, conservando el signo menos. Si necesitas desdoblar varias líneas, hazlo sucesivamente y conserva todos los términos que aparezcan.

Error que debes vigilar: aplicar esta regla a la suma de matrices completas. En general, $|A+B| \neq |A|+|B|$. Aquí solo se desdobla una línea y las demás se mantienen fijas.

Propiedad 9 Añadir una combinación de las otras líneas

Enunciado. Si se sustituye una fila o columna por **esa misma línea más una combinación lineal de las otras** del mismo tipo, el determinante no varía.

Por ejemplo, hacemos $F_3 \leftarrow F_3 + 2F_1 - 3F_2$:

$$(5,1,2) + 2(1,0,-2) - 3(3,-1,4) = (-2,4,-14).$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -14 \end{vmatrix} = -22.$$

Por qué se conserva. Aplicamos las propiedades 8 y 5 a la nueva tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -22 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = -22.$$

Los dos determinantes adicionales tienen filas iguales y son cero. Esta misma idea justifica añadir una combinación de cualquier número de otras filas; por columnas funciona igual.

Para qué sirve. Permite generar ceros, como en Gauss, y simplificar el cálculo conservando el determinante.

Error que debes vigilar: cambiar también el coeficiente de la línea original. En $F_i \leftarrow F_i + \lambda F_j$, con $i \neq j$, se conserva el determinante; en $F_i \leftarrow kF_i + \lambda F_j$, en general queda multiplicado por k.

Propiedad 10 Una línea combinación lineal de las demás

Enunciado. Si una fila o columna es combinación lineal de las otras del mismo tipo, el determinante es cero.

Aquí la tercera fila es la suma de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \qquad F_3 = F_1 + F_2.$$

Justificación. Desdoblamos por la tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0.$$

En cada término hay dos filas iguales. Si la combinación incluye coeficientes, estos salen como factores y los determinantes restantes siguen siendo nulos.

También se cumple el recíproco. Si el determinante es cero, las filas son linealmente dependientes y las columnas también: alguna fila y alguna columna pueden escribirse como combinación lineal de las demás. Recogemos este resultado sin desarrollar aquí su demostración formal.

Qué debes observar. Esa dependencia no siempre es fácil de reconocer a ojo. Un determinante nulo no exige que existan dos filas iguales o proporcionales: pueden estar relacionadas tres o más filas.

Propiedad 11 El determinante de un producto

Enunciado. Para dos matrices cuadradas A y B del mismo orden,

$$\boxed{|AB| = |A|\,|B|}.$$

Para qué sirve. Podemos calcular el determinante de un producto a partir de los determinantes de sus factores, sin efectuar la multiplicación de matrices.

Propiedad 12 El determinante de la inversa

Enunciado. Si A es invertible, entonces $|A| \neq 0$ y

$$\boxed{|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}}.$$

Justificación. Partimos de la definición de inversa, aplicamos la propiedad 11 y recordamos que el determinante de la identidad es 1:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= I, \\ |AA^{-1}| &= |I| = 1, \\ |A|\,|A^{-1}| &= 1, \\ |A^{-1}| &= \frac{1}{|A|}. \end{aligned}$$

La división es válida porque $|A| \neq 0$. Si el determinante de A fuese cero, la inversa no existiría.

> **Antes de calcular.** Busca líneas nulas, iguales, proporcionales o relacionadas. Después observa si puedes extraer factores, desdoblar una línea o generar ceros. Escribe siempre qué propiedad utilizas y qué efecto tiene sobre el determinante.

3. Cinco ejercicios para practicar

Trabaja en tu cuaderno. Primero intenta todos los ejercicios; las ayudas y las resoluciones están en los apartados siguientes.

Ejercicio 1 Observa antes de calcular — Esencial

Justifica por qué los siguientes determinantes son cero, sin desarrollarlos por Sarrus. Identifica en cada caso una relación concreta entre filas o columnas.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -6 & 3 & -15 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

Ejercicio 2 Sigue las transformaciones — Esencial

Sea A una matriz de orden 3 con $|A| = -6$. Obtenemos B realizando, **en este orden**, las operaciones siguientes:

$$F_1 \leftrightarrow F_3, \qquad F_2 \leftarrow -2F_2, \qquad F_3 \leftarrow F_3 + 3F_1 - 2F_2.$$

En cada paso se utilizan las filas de la matriz que existe en ese momento. Calcula $|B|$ y justifica el efecto de cada operación.

Ejercicio 3 Un determinante relacionado Intermedio

Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5,$$

calcula, mediante propiedades,

$$\begin{vmatrix} b & 3a-2b & c \\ e & 3d-2e & f \\ h & 3g-2h & i \end{vmatrix}.$$

Ejercicio 4 Calcula sin conocer las matrices Intermedio

Sean A y B matrices cuadradas de orden 3 tales que $|A| = -3$ y $|B| = 2$. Calcula:

$$\text{a)} \quad |2A^tB^{-1}|, \qquad \text{b)} \quad |(-3B)^{-1}A|.$$

Explica por qué existen las inversas que aparecen y de dónde procede cada exponente.

Ejercicio 5 Un parámetro en la matriz Reto

Sea

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & t+3 & -2 \\ 3 & 7 & t-6 \end{pmatrix}.$$

Halla todos los valores reales de t para los que $|A(t)| = 0$. Utiliza propiedades para simplificar el determinante antes de calcularlo y comprueba los valores obtenidos.

4. Protocolos antibloqueo

Lee solo hasta recuperar el siguiente paso. Cada pista añade una ayuda. «Continúa tú» te devuelve el ejercicio antes de revelar su resultado.

Ejercicio 1 · Observa antes de calcular

Pista 1: Reconoce. Examina líneas completas: ceros, repeticiones, múltiplos o relaciones entre varias filas.
Pista 2: Decide. En a) mira la segunda columna; en b), las dos primeras filas; en c), compara las dos primeras filas. En d), busca una combinación de F_1 y F_2.
Pista 3: Empieza. Para c), comprueba si el mismo número convierte cada elemento de F_1 en el correspondiente de F_2. Para d), calcula $F_3 - F_2$ y compáralo con F_1.
Continúa tú. Escribe la relación exacta y nombra la propiedad que permite concluir en cada apartado.

Ejercicio 2 · Sigue las transformaciones

Pista 1: Reconoce. Hay tres operaciones con efectos distintos: un intercambio, una multiplicación de una fila y una suma de otras filas.
Pista 2: Decide. Lleva por separado el factor que aporta cada paso. La última operación conserva el coeficiente 1 de la fila original.
Pista 3: Empieza. Después del intercambio, el determinante es $-|A|$. Ahora aplica el factor que corresponde a multiplicar F_2 por -2.
Continúa tú. Decide el efecto de la última operación, combina los factores y sustituye el dato.

Ejercicio 3 · Un determinante relacionado

Pista 1: Reconoce. La segunda columna pedida es una combinación de dos columnas del determinante conocido.
Pista 2: Decide. Desdobla únicamente esa columna. Conserva en ambos términos la primera y la tercera columna del determinante pedido.
Pista 3: Empieza. Separa $3(a,d,g)^t - 2(b,e,h)^t$. Extrae los factores 3 y -2 de los respectivos determinantes.
Continúa tú. Busca un término con columnas iguales y compara el orden de las columnas del otro con el dato.

Ejercicio 4 · Calcula sin conocer las matrices

Pista 1: Reconoce. Solo necesitas los determinantes de los factores y el orden de las matrices.
Pista 2: Decide. Combina las propiedades del producto, traspuesta, inversa y escalar. En b), el escalar está dentro de la matriz que se invierte.
Pista 3: Empieza. En a), escribe $|2A^tB^{-1}| = 2^3|A^t||B^{-1}|$. En b), empieza por $|(-3B)^{-1}| = 1/|-3B|$.
Continúa tú. Sustituye los determinantes conocidos, calcula las potencias con su signo y comprueba las condiciones de las inversas.

Ejercicio 5 · Un parámetro en la matriz

Pista 1: Reconoce. La primera columna permite generar dos ceros usando la primera fila.
Pista 2: Decide. Resta a cada una de las otras filas el múltiplo conveniente de F_1. Estas operaciones conservan el determinante y no exigen dividir por el parámetro.
Pista 3: Empieza. Haz $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$: la nueva segunda fila es $(0, t-1, 0)$. Calcula después $F_3 - 3F_1$.
Continúa tú. Aplica Sarrus a la matriz simplificada, iguala a cero y comprueba cada valor sin dividir por factores que puedan anularse.

5. Resoluciones detalladas

Ejercicio 1 · Observa antes de calcular

Idea inicial. Buscamos estructuras que obligan a que el determinante sea cero, sin realizar los seis productos de Sarrus.
a) Columna nula. La segunda columna es $(0,0,0)^t$. Por la propiedad 2, todos los términos del desarrollo tendrían un factor cero. El determinante es 0.
b) Filas iguales. Se cumple $F_1 = F_2 = (2,-1,3)$. Por la propiedad 4, el determinante es 0.
c) Filas proporcionales. Se cumple

$$F_2 = (-6,3,-15) = -3(2,-1,5) = -3F_1.$$

Extraer el factor -3 de la segunda fila dejaría dos filas iguales. Por la propiedad 6, el determinante es 0.
d) Combinación lineal. Calculamos

$$2F_1 + F_2 = 2(1,2,-1) + (3,-1,4) = (5,3,2) = F_3.$$

La tercera fila es combinación lineal de las otras dos. Por la propiedad 10, el determinante es 0.

a) 0	b) 0	c) 0	d) 0

Error que debes vigilar: decir solo «hay dependencia» sin mostrarla. La columna nula, la igualdad o la relación exacta entre filas es la justificación que debes escribir.

Ejercicio 2 · Sigue las transformaciones

Idea inicial. No conocemos los elementos de A, pero sí cómo afectan estas operaciones a su determinante.
Primer paso: intercambio. La propiedad 3 aporta un factor -1:

$$d_1 = -|A| = -(-6) = 6.$$

Segundo paso: una fila por -2. Por la propiedad 5, el determinante actual se multiplica por -2:

$$d_2 = (-2)d_1 = (-2) \cdot 6 = -12.$$

Tercer paso: combinación añadida. En

$$F_3 \leftarrow F_3 + 3F_1 - 2F_2$$

se conserva F_3 con coeficiente 1 y se le añade una combinación de las otras filas actuales. Por la propiedad 9, el determinante no cambia.
Reuniendo los efectos:

$$|B| = (-1) \cdot (-2) \cdot 1 \cdot |A| = 2(-6).$$

$$\boxed{|B| = -12}$$

Error que debes vigilar: elevar -2 al cubo. Solo se multiplica una fila por -2, no toda la matriz. Además, cada operación usa las filas que existen tras los pasos anteriores.

Ejercicio 3 · Un determinante relacionado

Idea inicial. Llamamos C_1, C_2, C_3 a las columnas del dato. El determinante pedido tiene columnas $C_2, 3C_1 - 2C_2, C_3$.
Aplicamos la propiedad 8 a la segunda columna y la propiedad 5 para extraer los factores. Las otras dos columnas permanecen iguales:

$$\begin{vmatrix} b & 3a-2b & c \\ e & 3d-2e & f \\ h & 3g-2h & i \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} b & b & c \\ e & e & f \\ h & h & i \end{vmatrix}.$$

El segundo determinante tiene dos columnas iguales y vale 0, por la propiedad 4.
El primero se obtiene del dato intercambiando las columnas 1 y 2. Por la propiedad 3,

$$\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -5.$$

Sustituimos:

$$3(-5) - 2 \cdot 0 = -15.$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} b & 3a-2b & c \\ e & 3d-2e & f \\ h & 3g-2h & i \end{vmatrix} = -15}$$

Error que debes vigilar: perder el signo del intercambio o modificar también otras columnas al desdoblar. En los dos términos se conservan la primera y la tercera columna del determinante pedido.

Ejercicio 4 · Calcula sin conocer las matrices

Condiciones. Como $|B| = 2 \neq 0$, B^{-1} existe. Además,

$$|-3B| = (-3)^3|B| = -27 \cdot 2 = -54 \neq 0,$$

así que también existe $(-3B)^{-1}$.

a) Traspuesta, escalar e inversa. El producto A^tB^{-1} es una matriz de orden 3. Multiplicarla por 2 aporta el factor 2^3. Después aplicamos las propiedades 11, 1 y 12:

$$\begin{aligned} |2A^tB^{-1}| &= 2^3|A^tB^{-1}| \\ &= 2^3|A^t|\,|B^{-1}| \\ &= 8\,|A|\,\frac{1}{|B|} = 8 \cdot (-3) \cdot \frac{1}{2} = -12. \end{aligned}$$

$$\boxed{|2A^tB^{-1}| = -12}$$

b) El escalar dentro de la inversa. Primero utilizamos la propiedad del producto y después invertimos el determinante de la matriz completa $-3B$:

$$\begin{aligned} |(-3B)^{-1}A| &= |(-3B)^{-1}|\,|A| \\ &= \frac{|A|}{|-3B|} = \frac{-3}{(-3)^3 \cdot 2} = \frac{-3}{-54} = \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

$$\boxed{|(-3B)^{-1}A| = \frac{1}{18}}$$

Los exponentes 3 proceden del orden de las matrices. Conservamos el orden de los factores matriciales; los productos de determinantes ya son productos de números.

Error que debes vigilar: escribir $|(-3B)^{-1}| = -3/|B|$. Hay que invertir todo el determinante $|-3B| = (-3)^3|B|$, incluido el factor y su signo.

Ejercicio 5 · Un parámetro en la matriz

Idea inicial. La primera columna contiene $1, 2, 3$. Podemos generar dos ceros restando múltiplos de la primera fila, sin alterar el determinante.

Por la propiedad 9 hacemos, en este orden,

$$F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1, \qquad F_3 \leftarrow F_3 - 3F_1.$$

Ejercicio 5 · Un parámetro en la matriz (continuación)

La primera fila permanece igual. Las otras se convierten en

$$(2, t+3, -2) - 2(1, 2, -1) = (0, t-1, 0),$$
$$(3, 7, t-6) - 3(1, 2, -1) = (0, 1, t-3).$$

Por tanto,

$$|A(t)| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 1 & t-3 \end{vmatrix}.$$

Aplicamos Sarrus a la matriz simplificada. Todos los productos salvo el de la diagonal principal contienen un cero:

$$|A(t)| = 1 \cdot (t-1)(t-3) = (t-1)(t-3).$$

La condición pedida es

$$(t-1)(t-3) = 0 \iff t = 1 \text{ o } t = 3.$$

$$\boxed{t \in \{1, 3\}}$$

Comprobación de los dos valores.

- Si $t = 1$, la segunda fila transformada es $(0, 0, 0)$: el determinante es cero por la propiedad 2. En la matriz original también se ve $F_2 = 2F_1$.
- Si $t = 3$, las filas transformadas son $F_2' = (0, 2, 0)$ y $F_3' = (0, 1, 0)$, proporcionales: el determinante es cero por la propiedad 6. En la original se cumple $F_3 = 2F_1 + \frac{1}{2}F_2$.

No hay más valores: la fórmula $|A(t)| = (t-1)(t-3)$ es válida para todo t y el producto solo se anula en los dos casos estudiados.

Error que debes vigilar: dividir por $t-1$ o por $t-3$ al resolver. Precisamente buscamos los valores que anulan esos factores; dividir por ellos eliminaría soluciones.

EL SIGUIENTE PASO

Trabaja con una ruta completa

Comprender las propiedades es el primer paso. En Eleva2 puedes seguir practicando determinantes dentro de una preparación ordenada de Matemáticas II y PAU: **tema explicado, vídeos ordenados, formularios, colección de ejercicios, pistas para empezar (protocolo antibloqueo), soluciones, resoluciones, directos y Tutor Eleva2**.
Únete gratis a la comunidad de avisos de WhatsApp para recibir nuevos recursos y las novedades de apertura.

ENTRAR EN WHATSAPP
En pantalla, pulsa el botón; en papel, escanea el código.

ESCANEA PARA UNIRTE