Mates con Andrés · Eleva2

Las reglas de derivación y cómo aplicarlas

Qué es este recurso.
Una guía para elegir y combinar las reglas de derivación sin perderte entre fórmulas. Encontrarás las versiones simple y compuesta, seis ejemplos comentados y diez funciones para practicar, con pistas progresivas y resoluciones paso a paso.

Cómo utilizarlo. Consulta las reglas, sigue los ejemplos y después intenta las diez funciones en tu cuaderno. Si te bloqueas, lee las pistas de una en una. Compara tu procedimiento con las resoluciones cuando hayas terminado el intento.

1. Por qué necesitamos las reglas

La derivada se define mediante un límite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

La definición explica qué estamos calculando. Sin embargo, obtener la derivada de esta manera puede resultar laborioso en cuanto la función se complica: una raíz exige racionalizar y un producto, un cociente o varias funciones encadenadas producen expresiones difíciles de organizar.

Las reglas de derivación se obtienen a partir de esa definición y permiten calcular la misma derivada de forma más directa. Aquí las enunciaremos y aprenderemos a aplicarlas, sin demostrarlas.

Antes de buscar una fórmula, mira la estructura. ¿La función es una suma, un producto, un cociente o una función dentro de otra? Esa primera decisión organiza todo el cálculo.

2. Las reglas: simple y compuesta

En las fórmulas siguientes, $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son funciones derivables; u' y v' son sus derivadas. Las letras k, c, n y a representan constantes.

Reglas para las operaciones

Operación	Regla	Qué debes recordar
Múltiplo constante	$(ku)' = ku'$	La constante se mantiene.
Suma o diferencia	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	Deriva término a término.
Producto	$(uv)' = u'v + uv'$	Se suman dos productos.
Cociente	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	Conserva el orden del numerador; el denominador queda al cuadrado.

En el cociente se entiende que $v \neq 0$. Recuerda que $(uv)'$ no es $u'v'$, y que la derivada de un cociente tampoco se obtiene dividiendo las derivadas.

Cómo leer la versión compuesta

La versión simple tiene como argumento x. En la compuesta aparece una expresión $u(x)$: conservas esa expresión y multiplicas por $u'(x)$. Por ejemplo,

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\sin u)' = \cos(u)\, u'.$$

Constantes, potencias y raíces

Función	Derivada simple	Derivada compuesta
c	0	Una constante siempre deriva a cero.
x	1	$(u)' = u'$
x^n	nx^{n-1}	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

El exponente n es constante. Las raíces de otros índices y los cocientes con potencias se pueden reescribir, por ejemplo, como $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ o $1/x^3 = x^{-3}$.

Exponenciales

Función	Derivada simple	Derivada compuesta
e^x	e^x	$(e^u)' = e^u u'$
a^x	$a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \ln(a)\, u'$

La base a es una constante positiva.

Logaritmos

Función	Derivada simple	Derivada compuesta
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$

Para el logaritmo de base a, se cumple $a > 0$ y $a \neq 1$.

Trigonométricas

Función	Derivada simple	Derivada compuesta
$\sin x$	$\cos x$	$(\sin u)' = \cos(u)\, u'$
$\cos x$	$-\sin x$	$(\cos u)' = -\sin(u)\, u'$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

Los argumentos de las funciones trigonométricas se expresan en radianes.

Trigonométricas inversas

Función	Derivada simple	Derivada compuesta
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

En particular, la derivada del arcocoseno lleva un signo menos; la del arcoseno, no.

La regla de la cadena: de fuera hacia dentro

Una composición aparece cuando una función actúa sobre el resultado de otra. Su regla general es

$$\left[F(u(x))\right]' = F'(u(x)) \cdot u'(x).$$

> **Deriva la función exterior conservando el interior y multiplica por la derivada de ese interior.**
> Si el interior también es compuesto, repite el proceso. Cada capa aporta su factor.

Para reconocer la función exterior, pregúntate: **«¿Qué operación haría la última si calculase el valor de la función?»**. Esa es la primera que debes derivar.

3. Cómo aplicarlas: método y ejemplos

1. **Reconoce la operación principal.** Una suma, un producto o un cociente pueden contener, además, funciones compuestas.
2. **Simplifica antes si ahorra trabajo.** Convierte raíces en potencias o reúne factores cuando convenga.
3. **Identifica las capas.** En una composición, ordénalas de fuera hacia dentro.
4. **Aplica las reglas con paréntesis.** Mantén visibles todos los factores interiores.
5. **Arregla el resultado.** Agrupa términos, factoriza y cancela factores completos, nunca sumandos aislados.
6. **Revisa.** Comprueba signos, orden del cociente y factores de la cadena.

Ejemplo 1 Simplificar antes de derivar

$$y = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x}.$$

El primer paso útil es transformar la raíz y reunir las potencias de la misma base:

$$y = \frac{3}{4} x\, x^{1/3} = \frac{3}{4} x^{4/3}.$$

Ahora aplicamos la regla de la potencia, manteniendo la constante:

$$y' = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} x^{4/3-1} = x^{1/3}.$$

Así evitamos una regla del producto que habría dado más trabajo.

$$\boxed{y' = \sqrt[3]{x}}$$

Ejemplo 2 El cociente y el signo menos

$$y = \frac{x^2+1}{x-2}.$$

Tomamos $u = x^2+1$ y $v = x-2$, de modo que $u' = 2x$ y $v' = 1$. Sustituimos en la regla antes de desarrollar:

$$y' = \frac{2x(x-2) - (x^2+1)\cdot 1}{(x-2)^2}.$$

El signo menos afecta a todo el segundo producto:

$$2x(x-2) - (x^2+1) = 2x^2 - 4x - x^2 - 1 = x^2 - 4x - 1.$$

Error que debes vigilar: escribir $-x^2+1$ al quitar el paréntesis $-(x^2+1)$.

$$\boxed{y' = \frac{x^2-4x-1}{(x-2)^2}}$$

Ejemplo 3 Los paréntesis deciden la función exterior

Estas expresiones se parecen, pero tienen una estructura diferente:

$$y_1 = \sin((2x-3)^5), \qquad y_2 = \big[\sin(2x-3)\big]^5.$$

En y_1, la función exterior es el seno. El recorrido es seno → potencia quinta → función afín. Derivamos cada capa conservando su interior:

$$y_1' = \cos((2x-3)^5)\cdot 5(2x-3)^4 \cdot 2.$$

$$\boxed{y_1' = 10(2x-3)^4\cos((2x-3)^5)}$$

En y_2, la función exterior es la potencia quinta. El recorrido es potencia quinta → seno → función afín:

$$y_2' = 5\big[\sin(2x-3)\big]^4 \cdot \cos(2x-3)\cdot 2.$$

$$\boxed{y_2' = 10\sin^4(2x-3)\cos(2x-3)}$$

En la primera función calculas el seno de una potencia; en la segunda elevas el seno a una potencia. Por eso las derivadas tienen estructuras diferentes.

Ejemplo 4 Un logaritmo con varias capas

$$y = \ln(\sqrt{x^2+3x+5}).$$

El orden es logaritmo → raíz cuadrada → polinomio. Llamamos $u = x^2+3x+5$, por lo que $u' = 2x+3$. Los tres factores son

$$y' = \frac{1}{\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(2x+3) = \frac{2x+3}{2u}.$$

Hemos utilizado $\sqrt{u}\,\sqrt{u} = u$ para simplificar.

$$\boxed{y' = \frac{2x+3}{2(x^2+3x+5)}}$$

Otra ruta. En este ejemplo también podemos simplificar antes:

$$\ln\sqrt{u} = \frac{1}{2}\ln u, \qquad y' = \frac{1}{2}\frac{u'}{u}.$$

Las dos rutas llevan al mismo resultado; la segunda reduce el número de capas del cálculo.

Ejemplo 5 Producto y cadena a la vez

$$y = (x^2 - 1)e^{\cos x}.$$

La operación principal es un producto. Dentro del segundo factor hay una composición: exponencial → coseno. Su derivada es

$$\left(e^{\cos x}\right)' = e^{\cos x}(-\sin x).$$

Aplicamos primero la estructura del producto:

$$y' = 2x\, e^{\cos x} + (x^2 - 1)e^{\cos x}(-\sin x).$$

Sacamos $e^{\cos x}$ como factor común para obtener una expresión más clara.

Error que debes vigilar: olvidar el factor $-\sin x$ al derivar la exponencial compuesta.

$$\boxed{y' = e^{\cos x}\left[2x - (x^2 - 1)\sin x\right]}$$

Ejemplo 6 Una trigonométrica inversa y una cancelación

$$y = \sqrt{x}\,\arccos(\sqrt{x}) - \sqrt{1 - x}.$$

Tenemos una resta; en el primer término hay un producto. Derivamos sus factores y la raíz del último término por separado:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad \left(\arccos(\sqrt{x})\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

La raíz final aporta $(\sqrt{1 - x})' = -1/(2\sqrt{1 - x})$. Al derivar toda la expresión, la resta cambia el signo de este último resultado:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\arccos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\left(-\frac{1}{\sqrt{1 - x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{1 - x}} \\ &= \frac{\arccos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{1 - x}} + \frac{1}{2\sqrt{1 - x}}. \end{aligned}$$

Los dos últimos términos se cancelan. Derivar es solo una parte del ejercicio: hay que revisar si la expresión obtenida se puede simplificar.

Error que debes vigilar: perder uno de los signos menos: el del arcocoseno, el de la derivada de $1 - x$ o el de la resta original.

$$\boxed{y' = \frac{\arccos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}$$

4. Diez funciones para practicar

Calcula la función derivada y simplifica el resultado todo lo posible. Trabaja en tu cuaderno. Antes de empezar las cuentas, identifica la estructura de cada función y decide qué reglas necesitas.

Ejercicio 1

$$f(x) = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x} - \frac{4}{x^2}.$$

Ejercicio 2

$$f(x) = 2x^4 \ln x - \frac{1}{2}x^4.$$

Ejercicio 3

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x-3}.$$

Ejercicio 4

$$f(x) = \sin((3x+1)^4).$$

Ejercicio 5

$$f(x) = \left[\sin(3x+1)\right]^4.$$

Ejercicio 6

$$f(x) = (x^2-2x+3)e^{\sin(2x)}.$$

Ejercicio 7

$$f(x) = \ln(\sqrt{x^2+4x+7}).$$

Ejercicio 8

$$f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+9}).$$

Ejercicio 9

$$f(x) = \sqrt{2x}\,\arccos(\sqrt{2x}) - \sqrt{1-2x}.$$

Ejercicio 10

$$f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2+4}}\right).$$

5. Protocolos antibloqueo

Lee solo la ayuda que necesites. Después de cada pista, vuelve al ejercicio. La resolución completa está en el siguiente apartado.

Ejercicio 1

Pista 1: Reconoce. La función es una diferencia. El primer término contiene un producto de potencias de la misma base; el segundo se puede escribir con exponente negativo.

Pista 2: Decide. Reescribe la raíz cúbica como una potencia y reúne los exponentes antes de derivar. Después aplica la regla de la potencia a cada término.

Pista 3: Empieza. Escribe $f(x) = \frac{3}{5}x\,x^{1/3} - 4x^{-2}$. Reduce primero el producto $x\,x^{1/3}$.

Continúa tú. Deriva las dos potencias manteniendo sus constantes. Revisa el signo que aparece al multiplicar dos números negativos y expresa el resultado con raíz y fracción.

Ejercicio 2

Pista 1: Reconoce. Hay una resta y, en su primer término, un producto entre una potencia y un logaritmo.

Pista 2: Decide. Utiliza la regla del producto en $2x^4 \ln x$ y deriva por separado el término final. Mantén los términos separados hasta terminar las reglas.

Pista 3: Empieza. Toma $u = 2x^4$, $v = \ln x$ y escribe $f' = u'v + uv' - (\frac{1}{2}x^4)'$.

Continúa tú. Sustituye las derivadas, reduce el producto con $1/x$ y agrupa los términos semejantes.

Ejercicio 3

Pista 1: Reconoce. La operación principal es un cociente de polinomios.

Pista 2: Decide. Nombra el numerador y el denominador y utiliza $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$.

Pista 3: Empieza. Escribe $u = x^2 + 2$, $v = x - 3$, $u' = 2x$ y $v' = 1$. Sustituye conservando $x^2 + 2$ entre paréntesis.

Continúa tú. Desarrolla solo el numerador, distribuye el signo menos y agrupa. El denominador debe quedar al cuadrado.

Ejercicio 4

Pista 1: Reconoce. El seno actúa sobre una potencia. La función exterior es el seno.

Pista 2: Decide. Recorre las capas en este orden: seno → potencia cuarta → función afín.

Pista 3: Empieza. Llama $u = 3x + 1$ y $v = u^4$. Entonces $f = \sin v$ y $f' = \cos(v)\, v'$.

Continúa tú. Calcula v' incluyendo la derivada de u. Multiplica los factores y conserva intacto el argumento del coseno.

Ejercicio 5

Pista 1: Reconoce. Ahora se eleva a la cuarta potencia el resultado del seno. La función exterior es la potencia.

Pista 2: Decide. Recorre potencia cuarta → seno → función afín. Compara este orden con el del ejercicio anterior.

Pista 3: Empieza. Llama $u = 3x + 1$ y $v = \sin u$. Entonces $f = v^4$ y $f' = 4v^3 v'$.

Continúa tú. Deriva v sin perder la derivada de u, sustituye y reúne las constantes.

Ejercicio 6

Pista 1: Reconoce. La operación principal es un producto. El segundo factor es una exponencial compuesta.

Pista 2: Decide. Organiza primero el producto. En la exponencial recorre exponencial → seno → función afín.

Pista 3: Empieza. Toma $p = x^2 - 2x + 3$ y $q = e^{\sin(2x)}$. Escribe $f' = p'q + pq'$ y prepara por separado la derivada de q.

Continúa tú. Incluye todas las capas de q. Después saca la exponencial como factor común y revisa si también puedes reunir un factor constante.

Ejercicio 7

Pista 1: Reconoce. La función tiene tres capas: logaritmo, raíz cuadrada y polinomio.

Pista 2: Decide. Deriva de fuera hacia dentro conservando el argumento de cada capa. Mantén la derivada del polinomio como último factor.

Pista 3: Empieza. Llama $u = x^2 + 4x + 7$ y $v = \sqrt{u}$. Escribe $f' = v'/v$ y prepara $v' = u'/(2\sqrt{u})$.

Continúa tú. Calcula u', sustituye y simplifica el producto de las dos raíces iguales. Reduce los factores constantes.

Ejercicio 8

Pista 1: Reconoce. El logaritmo actúa sobre una suma que contiene una raíz compuesta.

Pista 2: Decide. Deriva el logaritmo conservando su argumento; dentro, deriva por separado x y la raíz.

Pista 3: Empieza. Llama $u = x + \sqrt{x^2+9}$ y escribe $f' = u'/u$. En u', combina la derivada de x con la de la raíz.

Continúa tú. Reduce el numerador a una sola fracción. Compara sus factores con los del denominador antes de dar el cálculo por terminado.

Ejercicio 9

Pista 1: Reconoce. La función es una resta; el primer término contiene un producto y un arcocoseno compuesto.

Pista 2: Decide. Aplica el producto y deriva la raíz final por separado. Mantén visibles el signo menos del arcocoseno y el de la resta.

Pista 3: Empieza. Toma $u = \sqrt{2x}$ y $v = \arccos u$. Escribe $f' = u'v + uv' - (\sqrt{1-2x})'$.

Continúa tú. Calcula cada derivada interior, sustituye y agrupa los términos que tengan el mismo denominador. No omitas el factor que aporta $2x$.

Ejercicio 10

Pista 1: Reconoce. Hay una arcotangente cuyo argumento es la raíz cuadrada de un cociente.

Pista 2: Decide. Recorre arcotangente → raíz → cociente. Calcula la derivada del cociente por separado.

Pista 3: Empieza. Toma $u = (x^2-4)/(x^2+4)$ y $v = \sqrt{u}$. Entonces $f' = v'/(1+v^2)$ y $v' = u'/(2\sqrt{u})$.

Continúa tú. Obtén u' con la regla del cociente, incluyendo las derivadas de x^2. Sustituye, reduce $1+u$ a una fracción y simplifica los factores completos.

6. Resoluciones detalladas

Compara las decisiones y los pasos intermedios con los de tu intento. Si localizas un error, cierra la resolución y repite el ejercicio desde ese punto.

Ejercicio 1 Potencias antes de derivar

$$f(x) = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x} - \frac{4}{x^2}.$$

La función es una diferencia. Podemos simplificar el primer producto y escribir el segundo término con exponente negativo:

$$f(x) = \frac{3}{5}x^{1+1/3} - 4x^{-2} = \frac{3}{5}x^{4/3} - 4x^{-2}.$$

Aplicamos la regla de la potencia a los dos términos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{3}x^{4/3-1} - 4(-2)x^{-3} \\ &= \frac{4}{5}x^{1/3} + 8x^{-3}. \end{aligned}$$

El segundo término tiene signo positivo porque se han multiplicado dos signos negativos. Volvemos a la notación con raíz y fracción.

Error que debes vigilar: restar los exponentes al multiplicar x por $x^{1/3}$: al multiplicar potencias de la misma base, los exponentes se suman.

$$\boxed{f'(x) = \frac{4}{5}\sqrt[3]{x} + \frac{8}{x^3}}$$

Ejercicio 2 Producto y agrupación

$$f(x) = 2x^4 \ln x - \frac{1}{2}x^4.$$

En el primer término hay un producto. Derivamos cada factor en su lugar y, después, el término que se resta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (8x^3)\ln x + 2x^4\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot 4x^3 \\ &= 8x^3 \ln x + 2x^3 - 2x^3. \end{aligned}$$

Los dos últimos términos se cancelan. La simplificación forma parte del resultado.

Error que debes vigilar: derivar $2x^4 \ln x$ como el producto de sus derivadas. Debes sumar los dos términos de la regla del producto.

$$\boxed{f'(x) = 8x^3 \ln x}$$

Ejercicio 3 Un cociente con paréntesis

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x-3}.$$

Tomamos $u = x^2+2$, $u' = 2x$, $v = x-3$ y $v' = 1$. La regla del cociente da

$$f'(x) = \frac{2x(x-3) - (x^2+2)\cdot 1}{(x-3)^2}.$$

Desarrollamos y agrupamos el numerador, manteniendo el denominador factorizado:

$$2x(x-3) - (x^2+2) = 2x^2 - 6x - x^2 - 2 = x^2 - 6x - 2.$$

Error que debes vigilar: cambiar el orden de los productos del numerador o perder el signo menos que afecta al 2.

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 6x - 2}{(x-3)^2}}$$

Ejercicio 4 El seno es la función exterior

$$f(x) = \sin((3x+1)^4).$$

Las capas son seno → potencia cuarta → función afín. El seno deriva a coseno conservando todo su argumento:

$$f'(x) = \cos((3x+1)^4)\cdot\left[(3x+1)^4\right]'.$$

La potencia también es compuesta, así que

$$\left[(3x+1)^4\right]' = 4(3x+1)^3\cdot 3.$$

Sustituimos y reunimos las constantes:

$$f'(x) = \cos((3x+1)^4)\cdot 4(3x+1)^3\cdot 3.$$

Error que debes vigilar: convertir el argumento del coseno en $3x+1$. Al derivar el seno, su argumento se conserva completo.

$$\boxed{f'(x) = 12(3x+1)^3\cos((3x+1)^4)}$$

Ejercicio 5 La potencia es la función exterior

$$f(x) = [\sin(3x+1)]^4.$$

Ahora el recorrido es potencia cuarta → seno → función afín. Aplicamos primero la regla de la potencia al seno completo:

$$f'(x) = 4[\sin(3x+1)]^3 \cdot [\sin(3x+1)]'.$$

La derivada del seno compuesto es

$$[\sin(3x+1)]' = \cos(3x+1) \cdot 3.$$

Por tanto,

$$f'(x) = 4\sin^3(3x+1)\cos(3x+1) \cdot 3.$$

Error que debes vigilar: copiar la estructura del ejercicio 4: aquí la potencia afecta al seno y queda una potencia del seno en la derivada.

$$\boxed{f'(x) = 12\sin^3(3x+1)\cos(3x+1)}$$

Ejercicio 6 Producto con una exponencial compuesta

$$f(x) = (x^2 - 2x + 3)e^{\sin(2x)}.$$

La regla del producto organiza el cálculo. Tomamos $p = x^2 - 2x + 3$ y $q = e^{\sin(2x)}$. Sus derivadas son

$$p' = 2x - 2, \qquad q' = e^{\sin(2x)} \cdot \cos(2x) \cdot 2.$$

En q' aparecen los factores de la exponencial, del seno y de $2x$. Sustituimos en $f' = p'q + pq'$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-2)e^{\sin(2x)} \\ &\quad + (x^2 - 2x + 3)e^{\sin(2x)}\cos(2x) \cdot 2. \end{aligned}$$

La exponencial y el factor constante 2 son comunes. Los extraemos para dejar el resultado ordenado.

Error que debes vigilar: multiplicar las derivadas de los dos factores del producto u olvidar el factor 2 que aporta $2x$. Organiza primero el producto y después la composición del segundo factor.

$$\boxed{f'(x) = 2e^{\sin(2x)}[x - 1 + (x^2 - 2x + 3)\cos(2x)]}$$

Ejercicio 7 Logaritmo, raíz y polinomio

$$f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 4x + 7}).$$

Llamamos $u = x^2 + 4x + 7$, cuya derivada es $u' = 2x + 4$. Aplicamos las tres capas sin omitir ningún factor:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (2x+4).$$

El producto de las dos raíces es u, así que

$$f'(x) = \frac{2x+4}{2u} = \frac{2(x+2)}{2u} = \frac{x+2}{u}.$$

Sustituimos de nuevo el polinomio.

Error que debes vigilar: derivar solo el logaritmo o solo la raíz. La derivada del polinomio interior también debe aparecer.

$$\boxed{f'(x) = \frac{x+2}{x^2 + 4x + 7}}$$

Ejercicio 8 Simplificar una fracción compleja

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+9}).$$

El logaritmo es la función exterior. Su argumento es una suma, que derivamos término a término. Dentro de la raíz aplicamos la cadena:

$$(x + \sqrt{x^2+9})' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+9}} \cdot 2x = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}.$$

Por tanto,

$$f'(x) = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}}{x + \sqrt{x^2+9}}.$$

Para simplificar, reducimos el numerador a una fracción:

$$1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2+9} + x}{\sqrt{x^2+9}}.$$

Sustituimos y escribimos una sola fracción:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+9} + x}{\sqrt{x^2+9}(x + \sqrt{x^2+9})}.$$

El numerador completo coincide con uno de los factores del denominador, por lo que se cancela.

Error que debes vigilar: cancelar un sumando aislado dentro de $x + \sqrt{x^2+9}$. Aquí se cancela la suma completa como factor.

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}}$$

Ejercicio 9 Producto, arcocoseno y dos raíces

$$f(x) = \sqrt{2x}\,\arccos(\sqrt{2x}) - \sqrt{1-2x}.$$

Derivamos por separado las expresiones que después vamos a combinar:

$$(\sqrt{2x})' = \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x}},$$

$$(\arccos(\sqrt{2x}))' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{2x})^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}\sqrt{2x}},$$

$$(\sqrt{1-2x})' = \frac{1}{2\sqrt{1-2x}} \cdot (-2) = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}}.$$

Aplicamos el producto en el primer término y conservamos la resta del segundo:

$$f'(x) = \frac{\arccos(\sqrt{2x})}{\sqrt{2x}} + \sqrt{2x}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-2x}\sqrt{2x}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\right).$$

Se simplifica el factor $\sqrt{2x}$ y se agrupan los dos últimos términos:

$$f'(x) = \frac{\arccos(\sqrt{2x})}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{1-2x}} + \frac{1}{\sqrt{1-2x}}.$$

La cancelación deja una sola fracción.

Error que debes vigilar: olvidar el factor 2 al derivar $\sqrt{2x}$ o convertir la resta final en otro término negativo.

$$\boxed{f'(x) = \frac{\arccos(\sqrt{2x})}{\sqrt{2x}}}$$

Ejercicio 10 Arcotangente de una raíz con cociente

$$f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2+4}}\right).$$

El recorrido es arcotangente → raíz cuadrada → cociente. Empezamos preparando el interior:

$$u = \frac{x^2-4}{x^2+4}.$$

Con la regla del cociente,

$$\begin{aligned} u' &= \frac{2x(x^2+4) - (x^2-4)2x}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{2x\big[(x^2+4) - (x^2-4)\big]}{(x^2+4)^2} = \frac{16x}{(x^2+4)^2}. \end{aligned}$$

Ahora derivamos la raíz y la arcotangente:

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\sqrt{u})^2} \cdot \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}(1+u)}.$$

Antes de sustituir, reducimos la suma del denominador:

$$1 + u = 1 + \frac{x^2-4}{x^2+4} = \frac{2x^2}{x^2+4}.$$

Sustituimos las expresiones y simplificamos los factores completos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\dfrac{16x}{(x^2+4)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2+4}} \cdot \dfrac{2x^2}{x^2+4}} \\ &= \frac{4}{x(x^2+4)\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2+4}}}. \end{aligned}$$

Podemos reunir el factor x^2+4 con la raíz porque es positivo:

$$\begin{aligned} (x^2+4)\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2+4}} &= \sqrt{(x^2+4)(x^2-4)} \\ &= \sqrt{x^4-16}. \end{aligned}$$

Error que debes vigilar: olvidar el cuadrado del denominador de u' o sustituir $1+(\sqrt{u})^2$ por $1+u^2$: el cuadrado elimina la raíz y queda $1+u$.

$$\boxed{f'(x) = \frac{4}{x\sqrt{x^4-16}}}$$

EL SIGUIENTE PASO

Trabaja con una ruta completa

Dominar las reglas es un paso para preparar Matemáticas II y PAU con orden. En Eleva2 tienes el tema explicado, vídeos ordenados, formularios, colección de ejercicios, pistas para empezar con el **protocolo antibloqueo**, soluciones, resoluciones, directos y Tutor Eleva2.
Únete gratis a la comunidad de avisos de WhatsApp para recibir nuevos recursos y novedades de apertura.

ENTRAR EN WHATSAPP
En pantalla, pulsa el botón; en papel, escanea el código.

ESCANEA PARA UNIRTE