Mates con Andrés · Eleva2

La derivada

El concepto antes que las reglas de derivación

Qué es este recurso. Una guía para entender qué calculamos al derivar: cómo un límite transforma la pendiente de una secante en la pendiente de una tangente y cómo nace la función derivada. Después practicarás con tres ejercicios, pistas graduadas y resoluciones completas.

Cómo utilizarlo. Lee primero la explicación y relaciona cada fórmula con su significado. Intenta los ejercicios antes de consultar las pistas; utiliza solo la ayuda que necesites y deja las resoluciones para comprobar tu intento.

1. Comprender qué es la derivada

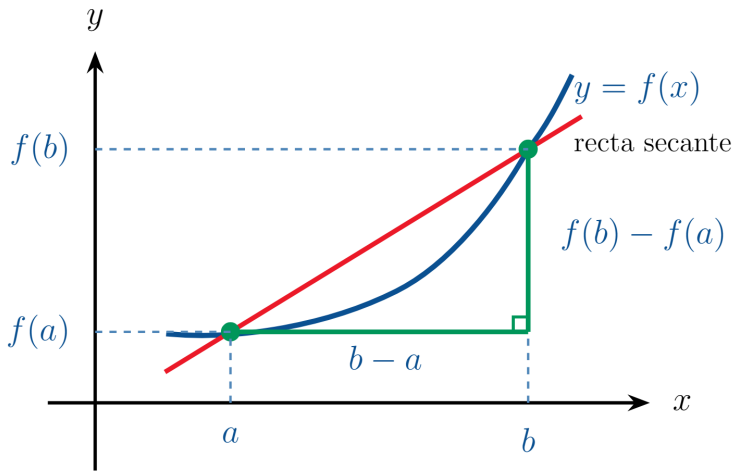
Medir el cambio en un intervalo

Queremos estudiar cómo cambia una función f. Elegimos dos abscisas $a < b$ y los puntos de su gráfica

$$A = (a, f(a)), \qquad B = (b, f(b)).$$

Una primera idea es unirlos mediante una recta **secante**. El cambio de una recta resulta fácil de medir: su pendiente es el desplazamiento vertical dividido entre el horizontal. Así obtenemos la **tasa de variación media**:

$$\mathrm{TVM}_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



El incremento horizontal es $b-a$; el vertical, $f(b)-f(a)$. Su cociente es la pendiente de la secante que une los dos puntos.

Una pendiente positiva indica una subida entre los extremos; una negativa, una bajada. Si el cociente vale 3, el cambio medio de f es de tres unidades por cada unidad de desplazamiento horizontal.

La tasa media solo mira los extremos

La tasa media utiliza $f(a)$ y $f(b)$. No cuenta lo que ha sucedido entre esos dos puntos. Una curva con muchas oscilaciones y otra con un recorrido más uniforme pueden tener exactamente la misma tasa media si coinciden en los extremos.

Por eso una tasa media positiva **no demuestra que la función crezca en todo el intervalo**. Resume el cambio entre el inicio y el final. Para conocer el cambio cerca de un punto necesitamos reducir el intervalo de observación.

Piensa en un trayecto en coche: conocer la velocidad media informa del conjunto del viaje, pero no permite saber a qué velocidad circulabas en cada instante. La velocidad instantánea responde a esa segunda pregunta.

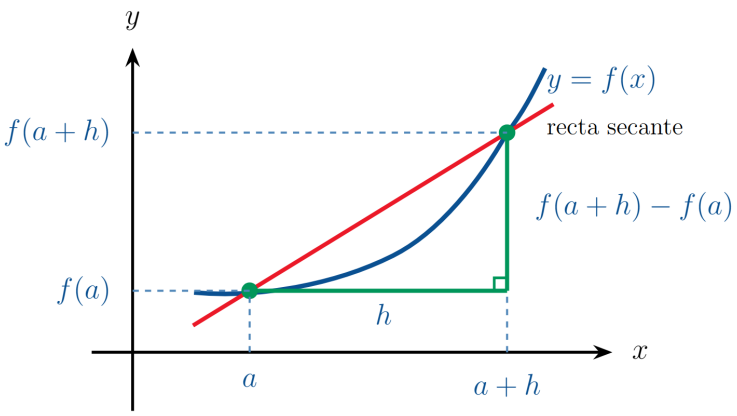
El segundo punto se llama ahora $a + h$

Mantenemos fijo a y escribimos

$$b = a + h, \qquad h = b - a.$$

No hemos cambiado el concepto; solo hemos nombrado el desplazamiento horizontal. El cociente queda

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}, \qquad h \neq 0.$$



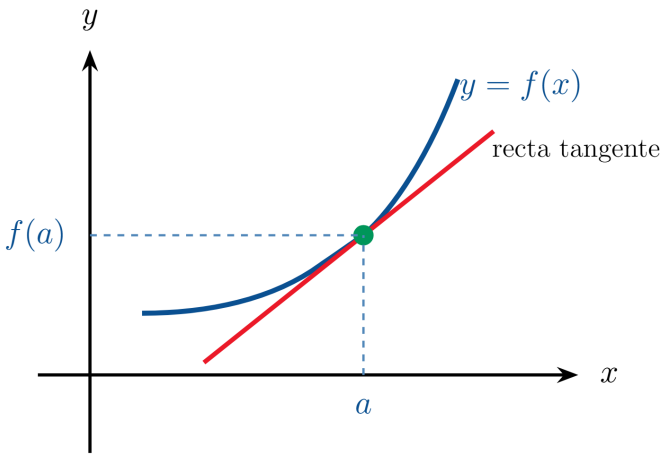
h es el incremento horizontal; $f(a + h) - f(a)$, el vertical. Mientras los puntos sean distintos, el cociente describe una secante.

Si $h > 0$, el segundo punto está a la derecha de a. Si $h < 0$, está a su izquierda. En ambos casos podemos acercarlo a a haciendo que h tienda a cero.

De la secante a la tangente

Cuando $h \to 0$, la abscisa $a + h$ se aproxima a a. Si las pendientes de las secantes se aproximan a un mismo número real finito, ese número es la pendiente de la **recta tangente** en A. Este paso se expresa mediante un límite:

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.}$$



> **La idea que debes tener clara:** la derivada de una función en un punto es la **pendiente de la recta tangente** a su gráfica en ese punto. $f'(a)$ es un número.

En un punto interior del dominio hay que poder aproximarse por ambos lados: los límites para $h \to 0^-$ y $h \to 0^+$ deben existir, ser finitos y coincidir.

Hacer $h \to 0$ no significa poner $h = 0$ en el cociente. Durante la aproximación, $h \neq 0$. El límite permite estudiar qué ocurre al acercarnos, aunque el cociente no esté definido en cero.

La derivada mide así el **cambio instantáneo** en un punto. En el ejemplo del coche, la derivada de la posición respecto al tiempo representa la velocidad instantánea.

Un ejemplo: tres derivadas puntuales

Consideramos

$$f(x) = x^2 - 3x.$$

Vamos a calcular por definición las derivadas en 0, 1 y 2. En cada caso sustituimos el punto a en la definición; después simplificamos y tomamos el límite.

En $x = 0$

Como $f(0) = 0$ y $f(h) = h^2 - 3h$,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - 3h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h-3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (h - 3) = -3. \end{aligned}$$

Si intentamos sustituir al principio, aparece $0/0$, una indeterminación. Al factorizar podemos cancelar h, porque estamos trabajando con $h \neq 0$. Entonces el límite ya se calcula por sustitución.

Interpretación: la tangente a la gráfica en $(0, 0)$ tiene pendiente -3. Por cada unidad que avanza hacia la derecha, esa recta baja tres unidades.

En $x = 1$

Primero calculamos $f(1) = 1 - 3 = -2$. Al evaluar en $1 + h$ hay que sustituir **todas** las apariciones de x:

$$f(1+h) = (1+h)^2 - 3(1+h).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 3(1+h) - (-2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 3 - 3h + 2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h-1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (h - 1) = -1. \end{aligned}$$

Interpretación: en $(1,-2)$, la tangente tiene pendiente -1. Observa la diferencia: $f(1)=-2$ es la **altura del punto**; $f'(1)=-1$ es la **pendiente de la tangente**.

En $x=2$

Ahora $f(2)=4-6=-2$. Aplicamos la misma definición:

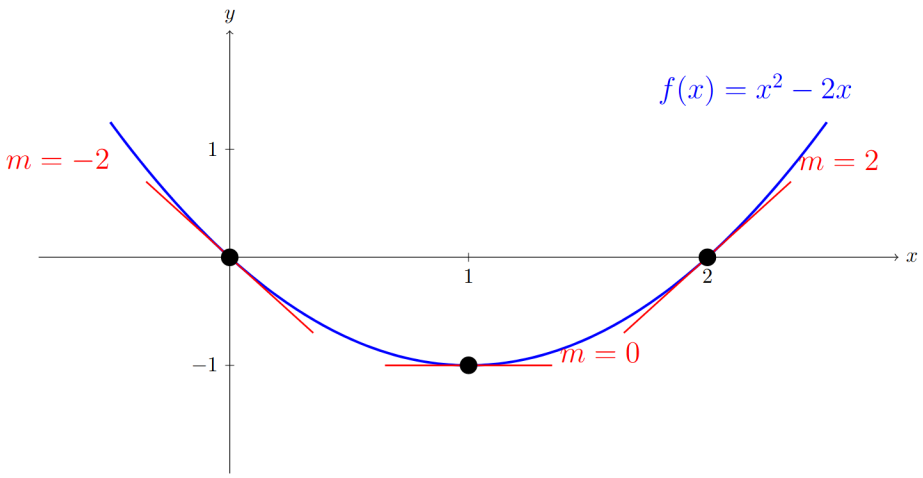
$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-3(2+h)-(-2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-6-3h+2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(h+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(h+1) = 1. \end{aligned}$$

Interpretación: la tangente en $(2,-2)$ tiene pendiente 1. Aunque $f(1)=f(2)=-2$, las pendientes en esos dos puntos son distintas.

> Para $f(x)=x^2-3x$ hemos obtenido $\boxed{f'(0)=-3,\quad f'(1)=-1,\quad f'(2)=1}$. Cada resultado es un número y describe una tangente concreta.

Otra parábola para ver las pendientes

La siguiente figura muestra **otra función**, $f(x)=x^2-2x$. En ella las tangentes tienen pendiente -2 en $x=0$, 0 en $x=1$ y 2 en $x=2$.



Ejemplo gráfico complementario: $f(x)=x^2-2x$. Las pendientes de esta figura pertenecen a esta función; las del ejemplo anterior x^2-3x son $-3,-1,1$.

La tangente descendente tiene pendiente negativa; la horizontal, cero; la ascendente, positiva. La derivada no es ninguna de esas rectas: es el número que expresa su pendiente.

La función derivada: un límite para todos los puntos

Hemos hecho tres límites para obtener tres pendientes. Si necesitáramos la derivada en veinte puntos, repetir el proceso veinte veces resultaría poco práctico.

La solución es trabajar con una abscisa genérica x, en lugar de fijar un valor concreto a. Para $f(x)=x^2-3x$, escribimos

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

En este límite **la variable que tiende a cero es** h. x se mantiene fijo mientras calculamos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - 3(x+h) - (x^2 - 3x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h - x^2 + 3x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2 - 3h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x + h - 3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x + h - 3) = 2x - 3. \end{aligned}$$

Así obtenemos la **función derivada**, cuya expresión es

$$\boxed{f'(x) = 2x - 3, \qquad x \in \mathbb{R}.}$$

Esta función asigna a cada abscisa la pendiente de la tangente en ese punto. Ahora basta sustituir:

$$f'(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3, \qquad f'(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1, \qquad f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1.$$

Con un solo límite hemos conseguido una expresión que sirve para cualquier punto de esta función.

Expresión	**Qué es**	**Qué representa**
$f(a)$	Un número	La ordenada del punto de la gráfica.
$f'(a)$	Un número	La pendiente de la tangente en ese punto.
$f'(x)$	Una función	La pendiente para cada abscisa donde exista la derivada.

La función derivada también puede ser constante: en ese caso asigna el mismo número a todos los puntos de su dominio. Ser una función no exige que su expresión contenga x.

De las pendientes a una nueva gráfica

El punto de la función original es $A = (a, f(a))$. Si su tangente tiene pendiente $f'(a)$, el punto correspondiente de la gráfica derivada es

$$D = (a, f'(a)).$$

Conservamos la abscisa y representamos la pendiente como nueva ordenada. Para $f(x) = x^2 - 3x$:

a	$A = (a, f(a))$	Pendiente $f'(a)$	$D = (a, f'(a))$
0	$(0, 0)$	-3	$(0, -3)$
1	$(1, -2)$	-1	$(1, -1)$
2	$(2, -2)$	1	$(2, 1)$

Al recoger las pendientes para todas las abscisas obtenemos la recta $y = 2x - 3$. Esa recta es la **gráfica de la función derivada**; no es una tangente a la parábola. Sus ordenadas indican cuánto vale la pendiente de cada tangente.

Otro ejemplo es $f(x) = \sin x$. Sus pendientes quedan descritas por $f'(x) = \cos x$, con los ángulos en radianes:

a	$\sin a$	Pendiente $\cos a$	Tangente a la función seno
0	0	1	Ascendente
$\pi/2$	1	0	Horizontal
π	0	-1	Descendente
$3\pi/2$	-1	0	Horizontal

La función coseno recoge las pendientes del seno. La idea es la misma: la derivada de una función en un punto es una pendiente; la función derivada reúne todas esas pendientes.

Por qué necesitamos las reglas de derivación

El primer ahorro consiste en calcular la función derivada una sola vez y evaluar después donde interese. Pero obtenerla por el límite también puede exigir bastante álgebra: desarrollar, factorizar, racionalizar o trabajar con fracciones.

Para $f(x) = x^2 - 3x$, hemos necesitado varias líneas hasta llegar a $2x - 3$. Las reglas de derivación permiten obtener directamente

$$f'(x) = 2x - 3.$$

Esas reglas **se justifican a partir de la definición por límite**. Dan la misma información y hacen el procedimiento más operativo, especialmente cuando debemos calcular muchas derivadas.

> **Comprender el límite permite saber qué estamos calculando. Las reglas de derivación permiten calcularlo con eficacia.** Primero entiende el concepto; después aprende a aplicar las reglas con sentido.

2. Tres ejercicios para practicar

Intenta resolverlos en tu cuaderno. En los ejercicios 1 y 3, los cálculos se hacen mediante cocientes incrementales y límites.

Ejercicio 1 De la tasa media a la función derivada

Considera la función $f(x) = x^2 - x + 2$.

a) Calcula la tasa de variación media de f en $[1, 3]$ e interpreta geométricamente el resultado.

b) Calcula la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos de la gráfica cuyas abscisas son $x = 1$ y $x = 1 + h$. Simplifica la expresión obtenida.

c) Calcula $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ e indica qué representa geométricamente el número obtenido.

d) Repite el razonamiento con una abscisa genérica x: calcula $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ y escribe la función derivada $f'(x)$.

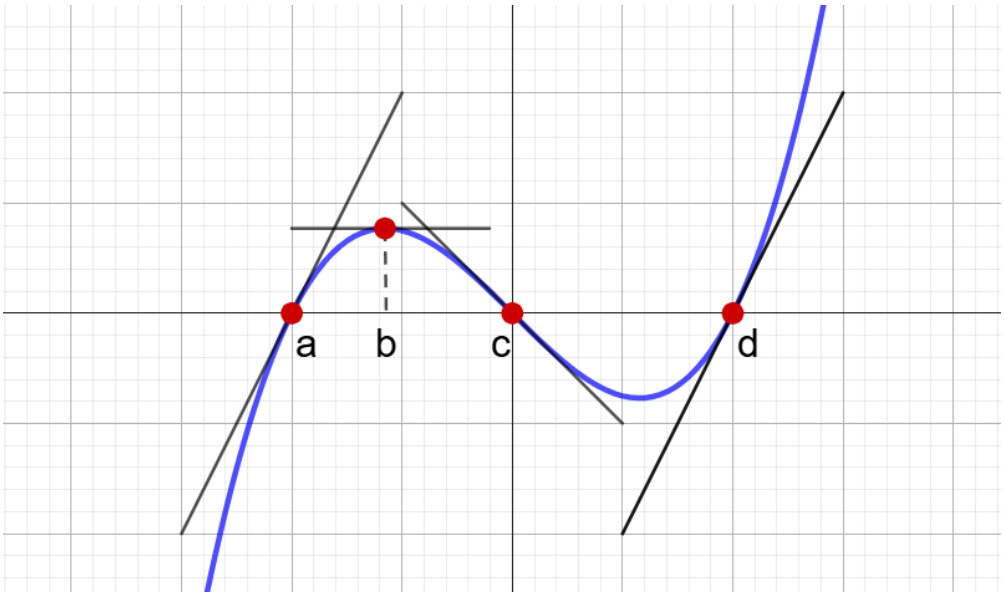
e) Completa las siguientes frases:

1. $f'(1)$ es un _____ y representa _____.
2. $f'(x)$ es una _____ y permite conocer _____.
3. La tasa de variación media corresponde a la pendiente de una recta _____.
4. La derivada en un punto corresponde a la pendiente de una recta _____.

f) Explica por qué la tasa de variación media de a) y la derivada en $x = 1$ no tienen por qué coincidir.

Ejercicio 2 Derivadas a partir de las tangentes

A partir de la gráfica de $f(x)$ y sus rectas tangentes en los puntos de abscisa a, b, c y d, calcula $f'(a)$, $f'(b)$, $f'(c)$ y $f'(d)$.



Ejercicio 3 Calcular mediante la definición

Calcula la derivada de las siguientes funciones aplicando la definición, no las reglas de derivación:

$$\text{a) } f(x) = 2x^2 - 3x + 1, \qquad \text{b) } g(x) = \sqrt{3x+2}, \qquad \text{c) } p(x) = \frac{4}{x}.$$

Indica el dominio de cada función y dónde existe su derivada finita.

3. Protocolos antibloqueo

Lee una pista y vuelve a intentarlo. Consulta la siguiente solo si sigues bloqueado. Las resoluciones completas comienzan después de los tres protocolos.

Ejercicio 1 De la tasa media a la función derivada

Pista 1: Reconoce. En a) y b) se pide una pendiente de secante; en c), el límite que da una pendiente de tangente; en d), una función que recoge las pendientes. En e) y f) debes distinguir estos conceptos.
Pista 2: Decide. Para la tasa media usa los extremos 1 y 3. Para el resto, escribe primero el cociente incremental. Antes de tomar el límite, desarrolla el cuadrado y agrupa los términos que contienen h.
Pista 3: Empieza. Organiza los primeros pasos:

$$\text{a) } \frac{f(3)-f(1)}{3-1}, \qquad \text{b) } f(1+h) = (1+h)^2 - (1+h) + 2.$$

En c) utiliza el cociente simplificado en b). En d), sustituye todas las x por $x+h$ y resta $f(x)$ entre paréntesis. Para e) y f), pregunta si estás describiendo un punto o un intervalo.
Continúa tú. Forma los cocientes, simplifica para $h \neq 0$ y toma los límites. Explica qué representa cada resultado y compara la tasa media con la derivada puntual.

Ejercicio 2 Derivadas a partir de las tangentes

Pista 1: Reconoce. Cada derivada se obtiene de la pendiente de su tangente. No necesitas encontrar una fórmula para la curva.
Pista 2: Decide. Elige dos puntos claros de cada recta tangente, aunque no pertenezcan ambos a la curva. Cuenta cuadros grandes de la cuadrícula y mantén el mismo criterio en ambos ejes.
Pista 3: Empieza. Escribe para cada tangente $m = \Delta y/\Delta x$. Toma un desplazamiento hacia la derecha, de modo que $\Delta x > 0$, y anota si el desplazamiento vertical es hacia arriba, horizontal o hacia abajo.
Continúa tú. Calcula los cuatro cocientes y asigna cada uno a la derivada correspondiente. Comprueba que el signo coincide con la inclinación de la tangente.

Ejercicio 3 Calcular mediante la definición

Pista 1: Reconoce. Las tres funciones se trabajan con $\lim_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$. El objetivo es transformar el cociente antes de sustituir $h = 0$.
Pista 2: Decide. En el polinomio, desarrolla y agrupa. En la raíz, multiplica por el conjugado. En $4/x$, reduce las fracciones a un denominador común. Anota primero las restricciones de cada dominio.
Pista 3: Empieza. Escribe:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^2 - 3(x+h) + 1 - (2x^2 - 3x + 1)}{h},$$
$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3x+3h+2} - \sqrt{3x+2}}{h},$$
$$p'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{4}{x+h} - \dfrac{4}{x}}{h}.$$

En b), el conjugado es $\sqrt{3x+3h+2} + \sqrt{3x+2}$.
Continúa tú. Efectúa la transformación de cada numerador, cancela el factor h cuando esté justificado y calcula el límite. Revisa por separado el extremo del dominio de la raíz.

4. Resoluciones detalladas

Ejercicio 1 De la tasa media a la función derivada

La función $f(x) = x^2 - x + 2$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Tasa de variación media en $[1, 3]$

Calculamos las ordenadas de los extremos:

$$f(1) = 1 - 1 + 2 = 2, \qquad f(3) = 9 - 3 + 2 = 8.$$

Entonces,

$$\mathrm{TVM}_{[1,3]} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{8 - 2}{2} = 3.$$

Interpretación: la secante que une $(1, 2)$ y $(3, 8)$ tiene pendiente 3. Entre esos extremos, por cada unidad horizontal el cambio medio de la función es de tres unidades.

b) Pendiente de la secante entre 1 y $1 + h$

El incremento horizontal es $(1 + h) - 1 = h$, con $h \neq 0$. Primero evaluamos:

$$\begin{aligned} f(1+h) &= (1+h)^2 - (1+h) + 2 \\ &= 1 + 2h + h^2 - 1 - h + 2 = 2 + h + h^2. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{2 + h + h^2 - 2}{h} = \frac{h(1+h)}{h} = 1 + h, \qquad h \neq 0.$$

El resultado depende de h, porque la secante cambia cuando cambiamos el segundo punto.

c) Derivada en $x = 1$

Tomamos el límite del cociente anterior:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}(1+h) = 1.$$

Interpretación: la tangente a la gráfica en $(1, 2)$ tiene pendiente 1. El número obtenido mide el cambio instantáneo en $x = 1$.

d) Función derivada mediante la definición

Con una abscisa genérica x, tenemos

$$f(x+h) = (x+h)^2 - (x+h) + 2.$$

Formamos el cociente y restamos la función completa entre paréntesis:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - (x+h) + 2 - (x^2 - x + 2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x - h + 2 - x^2 + x - 2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2 - h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x + h - 1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(2x + h - 1) = 2x - 1. \end{aligned}$$

La cancelación es válida para $h \neq 0$. Hemos obtenido

$$\boxed{f'(x) = 2x - 1, \qquad x \in \mathbb{R}.}$$

Como comprobación, $f'(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, en acuerdo con c).

e) Diferenciar los conceptos

1. $f'(1)$ es un **número** y representa **la pendiente de la recta tangente a la gráfica en** $x = 1$.
2. $f'(x)$ es una **función** y permite conocer **la pendiente de la recta tangente en cada abscisa donde exista la derivada**.
3. La tasa de variación media corresponde a la pendiente de una recta **secante**.
4. La derivada en un punto corresponde a la pendiente de una recta **tangente**.

f) Por qué la tasa media y la derivada no coinciden

La tasa media compara los extremos de $[1, 3]$. La derivada en 1 estudia el límite del cambio cerca de ese punto. Por eso responden a preguntas distintas:

$$\boxed{\mathrm{TVM}_{[1,3]} = 3, \qquad f'(1) = 1.}$$

La secante y la tangente tienen pendientes diferentes. No existe una obligación de que la tasa media de un intervalo sea igual a la derivada en uno de sus extremos.

Error que debes vigilar: confundir $f(1) = 2$, que es una altura, con $f'(1) = 1$, que es una pendiente; o sustituir $h = 0$ antes de simplificar el cociente.

Ejercicio 2 Derivadas a partir de las tangentes

Utilizamos $f'(a) = m_a$, y lo mismo para b, c y d. Para leer la pendiente, el punto inicial y el final se eligen sobre la **recta tangente**. Tomamos un cuadro grande como unidad en cada eje.

Punto	Lectura de la tangente	Δx	Δy	Pendiente
a	Avanza un cuadro y sube dos.	1	2	$2/1 = 2$
b	Es horizontal: no cambia su altura.	1	0	$0/1 = 0$
c	Avanza un cuadro y baja uno.	1	-1	$-1/1 = -1$
d	Avanza un cuadro y sube dos.	1	2	$2/1 = 2$

Por tanto,

$$\boxed{f'(a)=2, \qquad f'(b)=0, \qquad f'(c)=-1, \qquad f'(d)=2.}$$

Los signos concuerdan con las rectas: ascendentes en a y d, horizontal en b y descendente en c. Aunque los puntos a y d sean diferentes, sus tangentes tienen la misma pendiente.

Error que debes vigilar: medir la pendiente uniendo dos puntos cualesquiera de la curva: eso daría una secante. Debes utilizar dos puntos de la tangente dibujada.

Ejercicio 3 Calcular mediante la definición

a) Polinomio: $f(x)=2x^2-3x+1$

Su dominio es $\mathbb{R}$. La técnica consiste en desarrollar y sacar factor común h:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^2-3(x+h)+1-(2x^2-3x+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2x^2+4xh+2h^2-3x-3h+1-2x^2+3x-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{4xh+2h^2-3h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(4x+2h-3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(4x+2h-3)=4x-3. \end{aligned}$$

La cancelación se realiza para $h\neq 0$. El límite es finito para cualquier x, de modo que

$$\boxed{f'(x)=4x-3, \qquad x\in\mathbb{R}.}$$

Error que debes vigilar: desarrollar $2(x+h)^2$ como $2x^2+2h^2$. El término cruzado es $4xh$.

b) Radical: $g(x)=\sqrt{3x+2}$

Empezamos por el dominio:

$$3x+2\geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x\geq -\frac{2}{3}.$$

Para calcular la derivada en puntos interiores trabajamos con $x>-2/3$; entonces, para incrementos suficientemente pequeños, $x+h$ también pertenece al dominio.

La sustitución directa produce $0/0$. El conjugado permite transformar la diferencia de raíces:

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3x+3h+2}-\sqrt{3x+2}}{h}.$$

Multiplicamos numerador y denominador por la misma expresión:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3x+3h+2}-\sqrt{3x+2}}{h}\cdot\frac{\sqrt{3x+3h+2}+\sqrt{3x+2}}{\sqrt{3x+3h+2}+\sqrt{3x+2}} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(3x+3h+2)-(3x+2)}{h\left(\sqrt{3x+3h+2}+\sqrt{3x+2}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h\left(\sqrt{3x+3h+2}+\sqrt{3x+2}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3}{\sqrt{3x+3h+2}+\sqrt{3x+2}}=\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}. \end{aligned}$$

Hemos usado $(u-v)(u+v)=u^2-v^2$ y cancelado h para $h\neq 0$. El resultado es

$$\boxed{g'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}, \qquad x>-\frac{2}{3}.}$$

¿Qué ocurre en el extremo $x = -2/3$? La función sí está definida y vale cero. Pero, al acercarnos desde su dominio, solo podemos tomar $h > 0$:

$$\frac{g(-2/3+h)-g(-2/3)}{h} = \frac{\sqrt{3h}}{h} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{h}} \longrightarrow +\infty.$$

No se obtiene un número real finito. Por tanto, **en ese extremo no existe una derivada finita**, aunque la función esté definida.

$$\mathrm{Dom}(g) = [-2/3, +\infty), \qquad \mathrm{Dom}(g') = (-2/3, +\infty).$$

Error que debes vigilar: dar a la función y a su derivada el mismo dominio sin revisar el extremo; o multiplicar por el conjugado solo el numerador.

c) Función racional: $p(x) = 4/x$

El dominio es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Fijamos $x \neq 0$ y tomamos incrementos suficientemente pequeños con $x+h \neq 0$.

Formamos el cociente incremental y reducimos las fracciones del numerador a común denominador:

$$\begin{aligned} p'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{4}{x+h} - \dfrac{4}{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4x - 4(x+h)}{h\,x(x+h)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4x - 4x - 4h}{h\,x(x+h)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-4h}{h\,x(x+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-4}{x(x+h)} \\ &= -\frac{4}{x^2}. \end{aligned}$$

La cancelación es válida para $h \neq 0$. Como $x \neq 0$, el denominador del límite no se anula:

$$\boxed{p'(x) = -\frac{4}{x^2}, \qquad x \neq 0.}$$

Tanto p como p' tienen dominio $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. En $x = 0$ la función original no está definida y no puede tener derivada.

Error que debes vigilar: restar las fracciones como si se restaran también sus denominadores. El numerador correcto es $4x - 4(x+h) = -4h$.

EL SIGUIENTE PASO

Trabaja con una ruta completa

Comprender la derivada es el comienzo. En Eleva2 tienes el tema explicado, vídeos ordenados, formularios, colección de ejercicios, pistas para empezar (**protocolo antibloqueo**), soluciones, resoluciones detalladas, directos y Tutor Eleva2 para preparar Matemáticas II y PAU con una ruta completa.
Únete gratis a la comunidad de avisos de WhatsApp para recibir nuevos recursos y las novedades de apertura.

ESCANEA PARA UNIRTE

ENTRAR EN WHATSAPP
En pantalla, pulsa el botón; en papel, escanea el código.